ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

11

Ders Kitabı

YAZARLAR

Emel SEYMEN
Gencer GAZİOĞLU
Sultan YILDIRIM
Yılmaz MERAL

DEVLET KİTAPLARI

……………………., 2021

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6668
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1743

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Dil Uzmanı
Mustafa HACIOSMANOĞLU

Program Geliştirme Uzmanı
Fatih KUL

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Yrd. Doç. Dr. Eren Can AYBEK

Rehberlik ve Gelişim Uzmanı
Vedat UZUNER

Görsel Tasarım Uzmanı
Adem KURBAN

Grafik Tasarım Uzmanları
Ercan AYÇİÇEK
İsmail UZUN

ISBN 978-975-11-4599-4

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 28.05.2018 tarihli ve 78 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiştir.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

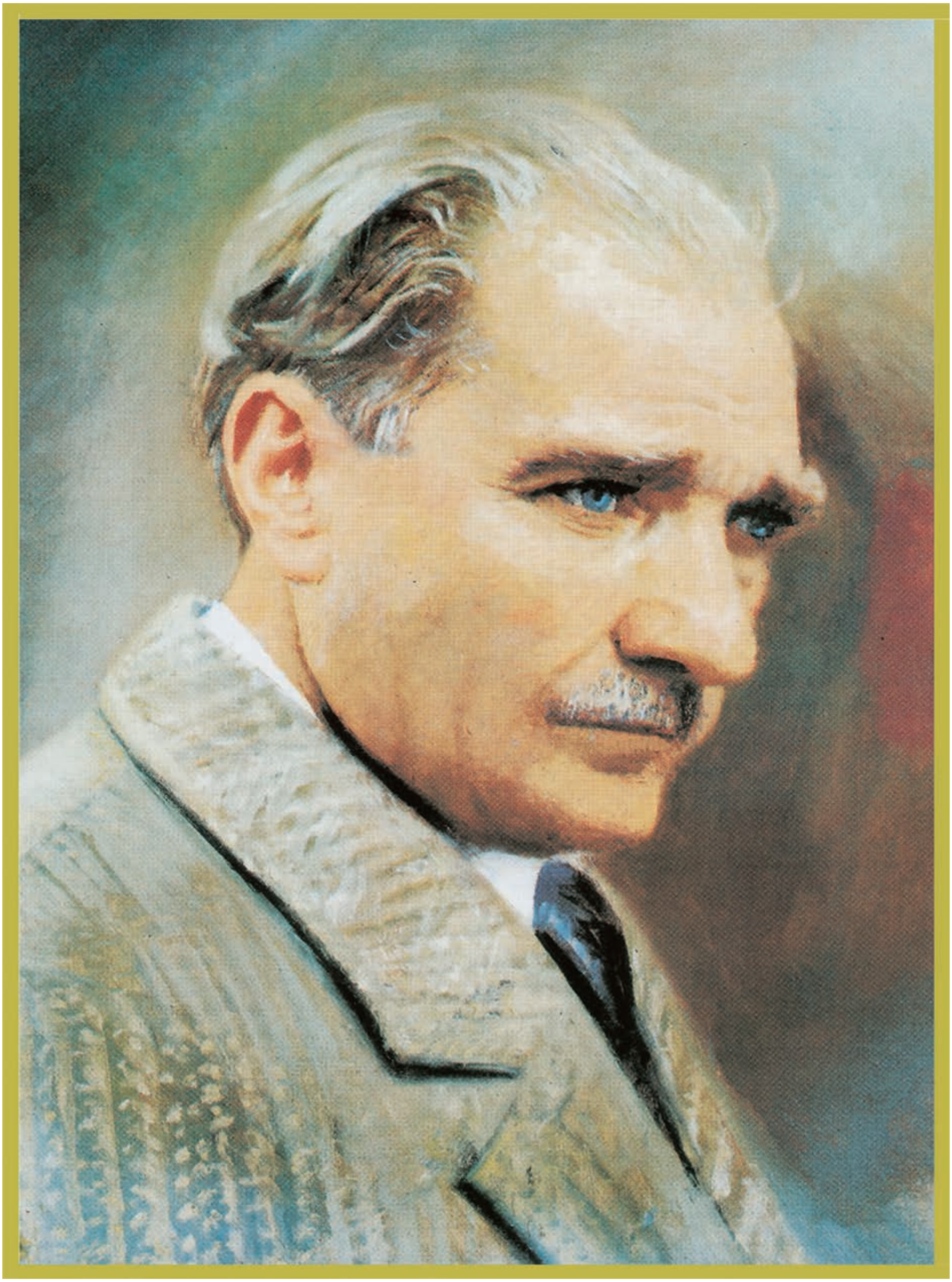
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

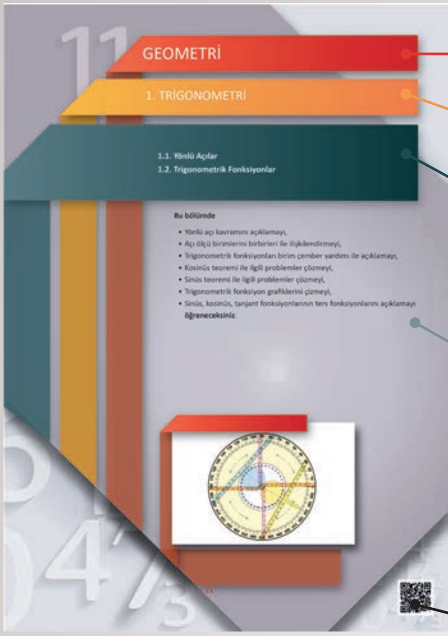
Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIN TANITIMI



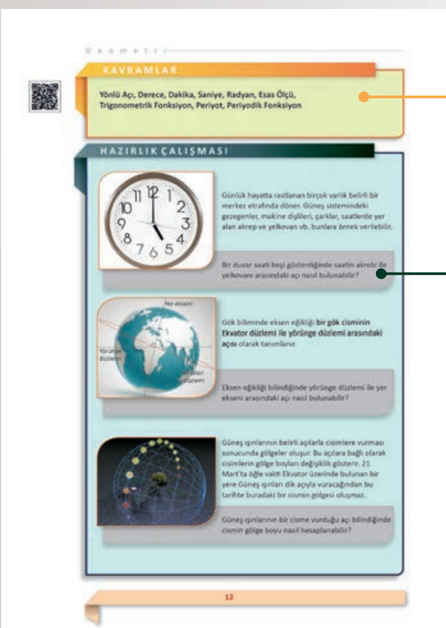
Öğrenme alanı.

Alt öğrenme alanı.

Konular.

Konu ile ilgili öğrenilecek bilgiler.

Karekod okuyucu ile taranarak resim, video, animasyon soru ve çözümlere ulaşılabilen karekod.

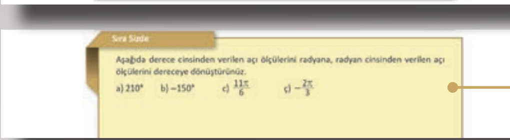


Konu ile ilgili kavramlar.

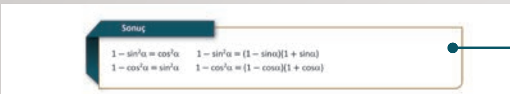
Konu öncesi merak uyandırıcı bilgi ve sorular.



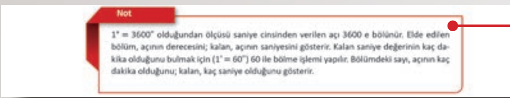
Konu ile ilgili örnek sorular ve çözümleri.



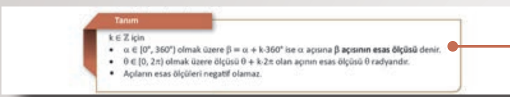
Konu ile ilgili pekiştirici sorular.



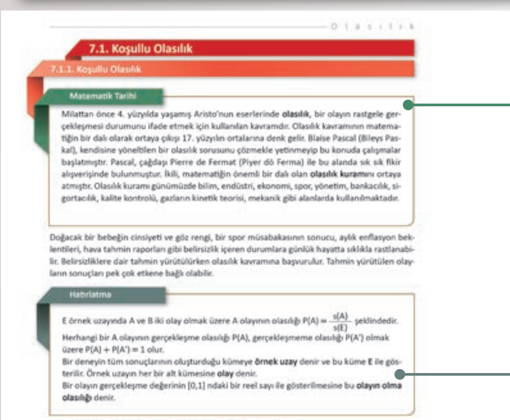
Konu ile ilgili öğrenilen bilgiler ışığında ulaşılan sonuçlar.



Konu ile ilgili açıklayıcı kısa bilgiler.

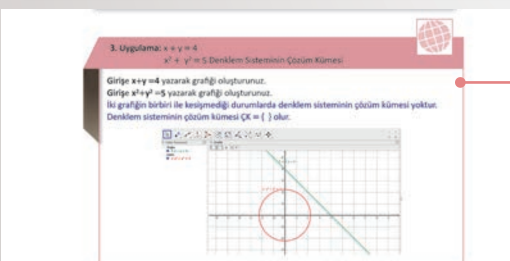


Konu ile ilgili kavram, tanım ve formüller.

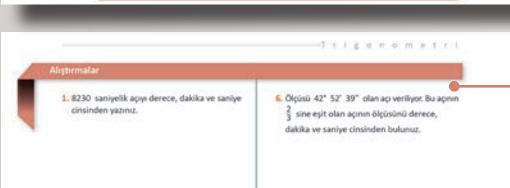


Konu ile ilgili tarihî bilgiler.

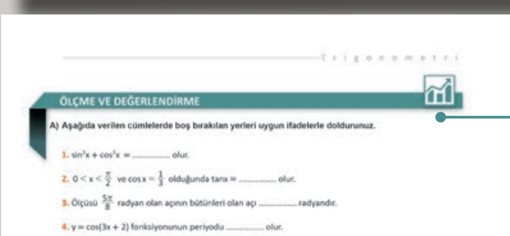
Konu ile ilgili hatırlatmalar.



Konu ile ilgili uygulamalar.



Konu ile ilgili alıştırmalar.



Konu ile ilgili öğrenilen bilgilerin değerlendirileceği farklı türdeki sorular.

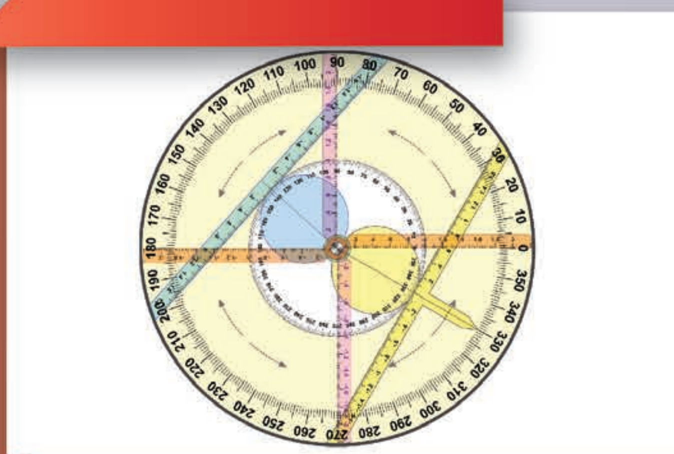
GEOMETRİ

1. TRİGONOMETRİ

1.1. Yönlü Açılar
1.2. Trigonometrik Fonksiyonlar

Bu bölümde

- Yönlü açı kavramını açıklamayı,
- Açı ölçü birimlerini birbirleri ile ilişkilendirmeyi,
- Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımı ile açıklamayı,
- Kosinüs teoremi ile ilgili problemler çözmeyi,
- Sinüs teoremi ile ilgili problemler çözmeyi,
- Trigonometrik fonksiyon grafiklerini çizmeyi,
- Sinüs, kosinüs, tanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını açıklamayı **öğreneceksiniz**.



KAVRAMLAR

Yönlü Açı, Derece, Dakika, Saniye, Radyan, Esas Ölçü, Trigonometrik Fonksiyon, Periyot, Periyodik Fonksiyon

HAZIRLIK ÇALIŞMASI



Günlük hayatta rastlanan birçok varlık belirli bir merkez etrafında döner. Güneş sistemindeki gezegenler, makine dişlileri, çarklar, saatlerde yer alan akrep, yelkovan vb. bunlara örnek verilebilir.

Bir duvar saati beşi gösterdiğinde saatin akrebi ile yelkovanı arasındaki açı nasıl bulunabilir?



Gök biliminde eksen eğikliği **bir gök cisminin Ekvator düzlemi ile yörünge düzlemi arasındaki açısı** olarak tanımlanır.

Eksen eğikliği bilindiğinde yörünge düzlemi ile yer ekseni arasındaki açı nasıl bulunabilir?



Güneş ışınlarının belirli açılarla cisimlere vurması sonucunda gölgeler oluşur. Bu açılara bağlı olarak cisimlerin gölge boyları değişiklik gösterir. 21 Mart'ta öğle vakti Ekvator üzerinde bulunan bir yere Güneş ışınları dik açıyla vuracağından bu tarihte buradaki bir cismin gölgesi oluşmaz.

Güneş ışınlarının bir cisme vurduğu açı bilindiğinde cismin gölge boyu nasıl hesaplanabilir?

1.1. Yönlü Açılar

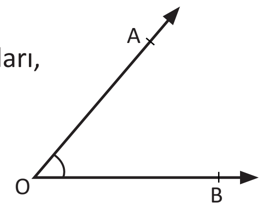
1.1.1. Yönlü Açı

Doğrusal hareket eden cisimlerin hareket yönü yukarı-aşağı, sağa-sola gibi kavramlarla ifade edilebilir. Bununla birlikte gezegen, yel değirmeni, dönme dolap gibi belirli bir merkez etrafında dairesel hareket eden cisimler de vardır. Bu cisimlerin hareket yönü **pozitif yön** ve **negatif yön** kavramları kullanılarak ifade edilir.

Hatırlatma

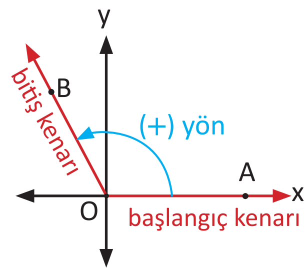
Düzlemde başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimine **açı** denir.
Bu iki ışın, **açının kenarları**; ışınların başlangıç noktası **açının köşesi** olarak adlandırılır.

Yandaki şekilde [OA ve [OB ışınları BOA açısının kenarları, O noktası açının köşesidir.



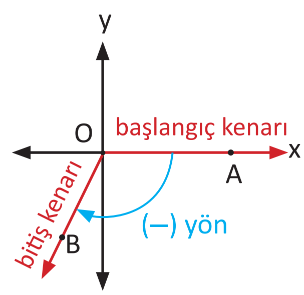
Kenarlarından biri **başlangıç**, diğeri **bitiş** kenarı olarak kabul edilen açıya **yönlü açı** denir.
Yönlü açılarda başlangıç kenarı sabit, bitiş kenarı hareketlidir.

Bitiş kenarı saatin dönme yönünün ters yönünde hareket eden açılara **pozitif yönlü açı** denir.
Yandaki AOB açısı pozitif yönlü açıdır.



Bitiş kenarı saatin dönme yönüyle aynı yönde hareket eden açılara **negatif yönlü açı** denir.

Yandaki şekilde AOB açısı negatif yönlü açıdır.

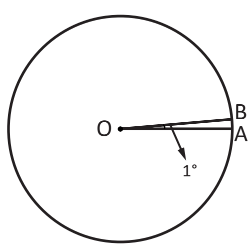


1.1.2. Açı Ölçü Birimleri

Bir açının ölçülmesi açının kolları arasındaki açıklığın belirlenmesi ile yapılır. Açının ölçüsünü ifade etmek için **derece** veya **radyan** birimleri kullanılır.

Derece

Bir tam çember yayının 360 eş parçaya bölünmesiyle elde edilen her bir yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir. Bu ölçü **1°** biçiminde gösterilir. Bir çemberin yay ölçüsü 360° olur.



Derecenin $\frac{1}{60}$ ine **1 dakika** denir. Bu ölçü **1'** biçiminde gösterilir.

Dakikanın $\frac{1}{60}$ ine **1 saniye** denir. Bu ölçü **1"** biçiminde gösterilir.

$\mathbf{1° = 60' = 3600"}$ olur.

Bir açının ölçüsü a derece b dakika c saniye ise bu $\mathbf{a° + b' + c"}$ veya $\mathbf{a°\ b'\ c"}$ biçiminde gösterilir.

1. Örnek

Ölçüsü 5° 20' 10" olan açıyı saniye cinsinden bulunuz.

Çözüm

1° = 3600" olduğuna göre 5° = 5·3600 = 18 000"
1' = 60" olduğuna göre 20' = 20·60 = 1200" olur.
O hâlde 5° 20' 10" = 18 000" + 1200" + 10" = 19 210" olur.

Not

1° = 3600" olduğundan ölçüsü saniye cinsinden verilen açı 3600 e bölünür. Elde edilen bölüm, açının derecesini; kalan, açının saniyesini gösterir. Kalan saniye değerinin kaç dakika olduğunu bulmak için (1' = 60") 60 ile bölme işlemi yapılır. Bölüm, açının kaç dakika olduğunu; kalan, kaç saniye olduğunu gösterir.

2. Örnek

22 000 saniyelik açı ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

Çözüm

1. Yol

22 000 | 3600
− 21 600 | 6°
00400"

400 | 60
− 360 | 6'
40"

2. Yol

22 000 | 60
− 21 960 | 366
40"

366 | 60
− 360 | 6°
6'

Buna göre 22 000" = 6° 6' 40" olur.

3. Örnek

$m(\widehat{A}) = 17°\ 12'\ 08"$ ve $m(\widehat{B}) = 24°\ 10'\ 57"$ açı ölçülerine göre aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$ b) $m\widehat{B} - m(\widehat{A})$ c) $\frac{m(\widehat{A})}{2}$ ç) $\frac{m(\widehat{B})}{3}$

Çözüm

a)
17° 12' 08"
+ 24° 10' 57"
41° 22' 65"
60" = 1' → (65" den 1' (60") sola aktarıldı.)

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 41°\ 23'\ 05"$ olur.

b)
1°
24° 10' 57" → (24° den 1° (60') sağa aktarıldı.)
− 17° 12' 08"

23° 70' 57"
− 17° 12' 08"
6° 58' 49"

$m(\widehat{B}) - m(\widehat{A}) = 6°\ 58'\ 49"$ olur.

c) $\dfrac{17°\ 12'\ 08''}{2} = \dfrac{16°}{2}\ \dfrac{72'}{2}\ \dfrac{08''}{2}$ (17° 2 ye tam bölünmediğinden 1° (60') sağa aktarıldı.)

$\dfrac{m(\widehat{A})}{2} = 8°\ 36'\ 4''$

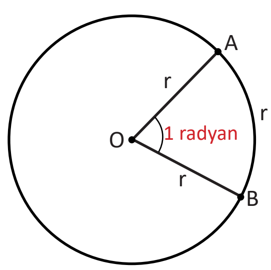
ç) $\dfrac{24°\ 10'\ 57''}{3} = \dfrac{24°}{3}\ \dfrac{9'}{3}\ \dfrac{117''}{3}$ (10' 3 e bölünmediğinden 1' (60") sağa aktarıldı.)

$\dfrac{m(\widehat{B})}{3} = 8°\ 3'\ 39''$

Radyan

Bir çemberde yarıçap uzunluğuna eşit uzunluktaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir ve bu ölçü $\mathbf{1^R}$, **1R** veya **1rad** ile gösterilir.

Bu kitapta bir açının ölçüsü π cinsinden yazıldığında ölçünün birimi **radyan** *olarak kabul edilecektir.*



r birim yay uzunluğu — 1 radyan

2πr birim yay uzunluğu — x radyan

$r \cdot x = 2\pi r \Rightarrow x = 2\pi$

Bir çember yayının ölçüsü 2π radyandır.

Buna göre **360°** = **2π** radyandır.

Bir açının derece cinsinden ölçüsü D, radyan cinsinden ölçüsü R olmak üzere

360° — 2π

D — R

$D \cdot 2\pi = R \cdot 360°$

$\dfrac{D}{360°} = \dfrac{R}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi}}$ elde edilir.

Bu orantı, derece ile radyanı birbirine dönüştürmek için kullanılır.

4. Örnek

Aşağıda verilen açı ölçülerinin radyan cinsinden eşitlerini bulunuz.

a) 45° b) −120° c) 330°

Çözüm

a) 180° — π

45° — x

$180° \cdot x = 45° \cdot \pi$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ radyan olur.

b) $\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi}$ formülünden $\dfrac{-120°}{180°} = \dfrac{R}{\pi}$

$R = -\dfrac{2\pi}{3}$ radyan olur.

c) $\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi}$ formülünden $\dfrac{330°}{180°} = \dfrac{R}{\pi}$

$R = \dfrac{11\pi}{6}$ radyan olur.

5. Örnek

2 radyanlık bir açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

1. Yol

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \times & 360° \\ 2^R & & x \end{array}$$

$2\pi \cdot x = 360° \cdot 2$

$x = \dfrac{360°}{\pi}$ olur.

2. Yol

$\dfrac{D}{180°} = \dfrac{2^R}{\pi} \Rightarrow D = \dfrac{360°}{\pi}$ olur.

6. Örnek

Aşağıda verilen açı ölçülerinin derece cinsinden eşitlerini bulunuz.

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{3\pi}{4}$ c) $-\dfrac{7\pi}{5}$

Çözüm

1. Yol

a)
$$\begin{array}{ccc} \pi & \times & 180° \\ \frac{\pi}{6} & & x \end{array}$$

$\pi \cdot x = 180° \cdot \dfrac{\pi}{6}$

$x = \dfrac{180°}{6} = 30°$ olur.

b) $\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow \dfrac{D}{180°} = \dfrac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow D = \dfrac{3}{4} \cdot 180° = 135°$ olur.

c) $\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow \dfrac{D}{180°} = \dfrac{-\frac{7\pi}{5}}{\pi} \Rightarrow D = -\dfrac{7}{5} \cdot 180° = -252°$ olur.

2. Yol

$\pi = 180°$ olduğundan

a) $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{180°}{6} = 30°$ olur.

b) $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$ olur.

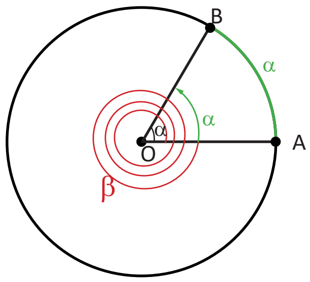
c) $\dfrac{-7\pi}{5} = \dfrac{-7 \cdot 180°}{5} = -252°$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıda derece cinsinden verilen açı ölçülerini radyana, radyan cinsinden verilen açı ölçülerini dereceye dönüştürünüz.

a) $210°$ b) $-150°$ c) $\dfrac{11\pi}{6}$ ç) $-\dfrac{2\pi}{3}$

Esas Ölçü



Yandaki O merkezli çember üzerinde A ve B noktalarını birleştiren yayı gören merkez açının ölçüsü α olmak üzere çember üzerinde A noktasından pozitif yönde ilerleyen bir kişi, 3 turun ardından B noktasında durduğunda bu kişinin kaç derece yer değiştirdiği
$\beta = \alpha + 3 \cdot 360°$ şeklinde yazılabilir.
tur sayısı

Şekilde görüldüğü gibi A noktasından harekete başlayan kişi 3 turun ardından B noktasına varmış ve çember üzerinde α açısı kadar yer değişikliği yapmıştır.
Bu α açısı, β açısının esas ölçüsüdür.
$\beta = \alpha + 3 \cdot 360°$ açısında α, β nın 360° ile bölümünden elde edilen kalandır.
*Bu kitapta **açı ölçüsü** ifadesi yerine **açı** ifadesi kullanılacaktır.*

Tanım

$k \in \mathbb{Z}$ için
- $\alpha \in [0°, 360°)$ olmak üzere $\beta = \alpha + k \cdot 360°$ ise α açısına **β açısının esas ölçüsü** denir.
- $\theta \in [0, 2\pi)$ olmak üzere ölçüsü $\theta + k \cdot 2\pi$ olan açının esas ölçüsü θ radyandır.
- Açıların esas ölçüleri negatif olamaz.

7. Örnek

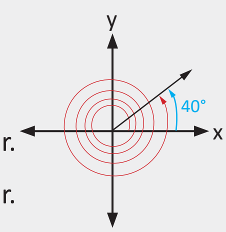
Esas ölçüsü 47° olan pozitif en küçük üç açıyı bulunuz.

Çözüm
Bu açıların genel ifadesi $47° + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$) biçimindedir.
$k = 0$ için $47° + 0 \cdot 360° = 47°$
$k = 1$ için $47° + 1 \cdot 360° = 407°$
$k = 2$ için $47° + 2 \cdot 360° = 767°$ olur.

8. Örnek

Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini derece cinsinden bulunuz.
a) 1480° b) −1250°

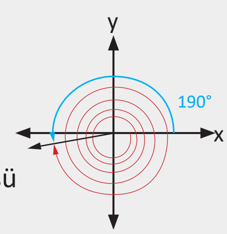
Çözüm
Derece cinsinden verilen açının esas ölçüsü,
aynı açının 360° ye bölümünden elde edilen kalandır.
a) 1480° lik açının esas ölçüsü 1480° nin 360° ye bölünmesiyle bulunur.



$$\begin{array}{r|l} 1480 & 360 \\ \hline -1440 & 4 \\ 40° & \end{array}$$

$1480° = 40° + 4 \cdot 360°$ olduğundan esas ölçüsü 40° olur.

b)
$$\begin{array}{r|l} -1250 & 360 \\ \hline -(-1440) & -4 \\ 190° & \end{array}$$



$-1250° = 190° + (-4) \cdot 360°$ olduğundan $-1250°$ lik açının esas ölçüsü 190° olur.
Esas ölçünün [0°, 360°) nda olduğuna dikkat ediniz.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

a) 1270° b) −780°

9. Örnek

Esas ölçüsü $\frac{2\pi}{5}$ olan ve $\frac{2\pi}{5}$ ten farklı pozitif <u>en küçük</u> iki açıyı radyan cinsinden bulunuz.

Çözüm

Bu açıların genel ifadesi $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ biçimindedir.

$k = 1$ için $\frac{2\pi}{5} + 1 \cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5}$ olur.

$k = 2$ için $\frac{2\pi}{5} + 2 \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5}$ olur.

10. Örnek

Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) 35π b) -26π c) $\frac{28\pi}{5}$ ç) $-\frac{22\pi}{3}$

Çözüm

Ölçüsü radyan olarak verilen açının esas ölçüsü bu açının 2π ye bölümünden kalandır.

a) 35π nin 2π ye bölümünden kalan π olduğundan bu açının esas ölçüsü π radyan olur.

b) -26π nin 2π ye bölümünden kalan 0 olduğundan bu açının esas ölçüsü 0 radyan olur.

c) $\frac{28\pi}{5} = \frac{8\pi + 20\pi}{5} = \frac{8\pi}{5} + 4\pi = \frac{8\pi}{5} + 2 \cdot 2\pi$ olduğundan esas ölçü $\frac{8\pi}{5}$ radyan olur. (2: tur sayısı)

ç) $-\frac{22\pi}{3} = \frac{2\pi - 24\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 8\pi = \frac{2\pi}{3} - 4 \cdot 2\pi$ olduğundan esas ölçü $\frac{2\pi}{3}$ radyan olur. (4: tur sayısı (ters yönde))

Sıra Sizde

Aşağıda ölçüleri verilen açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) $\frac{20\pi}{3}$ b) $-\frac{37\pi}{3}$

Alıştırmalar

1. 8230 saniyelik açıyı derece, dakika ve saniye cinsinden yazınız.

2. Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini derece cinsinden yazınız.

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{11\pi}{2}$

3. Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

a) 790° b) −1040° c) −280°

4. Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) = \frac{4\pi}{9}$ radyan, $m(\widehat{B}) = 37°$ olduğuna göre C açısının derece cinsinden ölçüsünü bulunuz.

5. Ölçüsü 42° 38' 25" olan açının tümlerinin ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

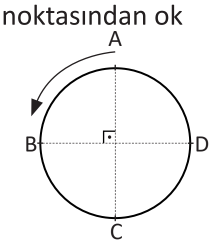
6. Ölçüsü 42° 52' 39'' olan açı veriliyor. Bu açının $\frac{2}{3}$ sine eşit olan açının ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

7. Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) $\frac{28\pi}{3}$ b) $-\frac{35\pi}{8}$

8. 45° lik açının ölçüsünü radyan cinsinden bulunuz.

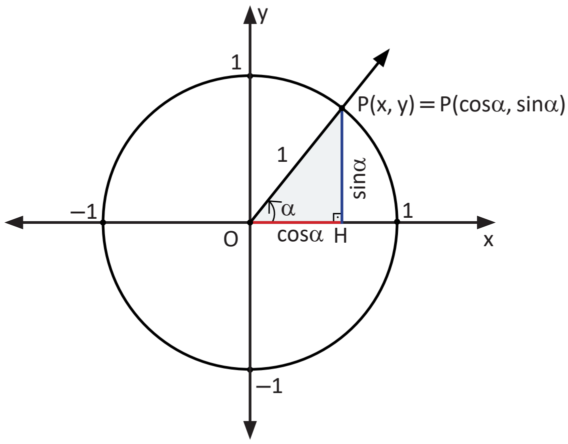
9. Daire şeklindeki bir pistin A noktasından ok yönünde harekete başlayan bir motosikletli 2760° lik açı yaparak duruyor. Bu motosikletlinin, hareketini hangi ardışık iki nokta arasında tamamladığını bulunuz.



1.2. Trigonometrik Fonksiyonlar

1.2.1. Trigonometrik Fonksiyonların Birim Çember Yardımıyla Açıklanması

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonları



Birim çember üzerinde P(x, y) noktası verilsin ve bu noktayı orijinle birleştiren [OP nın x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α olsun.
P noktasının apsisine α **açısının kosinüsü** denir ve bu ifade **cosα** ile gösterilir. **$x = \cos\alpha$** olur.
P noktasının ordinatına α **açısının sinüsü** denir ve bu ifade **sinα** ile gösterilir. **$y = \sin\alpha$** olur.
Buna göre x eksenine **kosinüs ekseni**, y eksenine **sinüs ekseni** denir.
P noktası birim çember üzerinde bulunduğundan apsis ve ordinat değerleri –1 den küçük, 1 den büyük olamaz. Buna göre $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ olur.

Yukarıdaki birim çemberde P noktasından indirilen dikmenin ayağı H olmak üzere POH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ özdeşliği elde edilir.

Sonuç

$1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \qquad 1 - \sin^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$

$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \qquad 1 - \cos^2\alpha = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

11. Örnek

$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ olduğuna göre cosα değerlerini bulunuz.

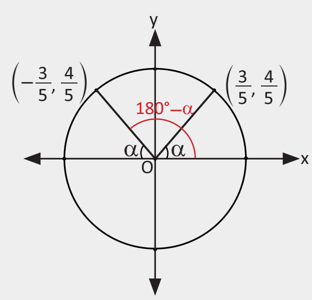
Çözüm

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25}$ olur. Buradan

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ veya $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ olur.



12. Örnek

Birim çemberde 270° ve 360° lik açıların sinüs ve kosinüs değerlerini bulunuz.

Çözüm

P, birim çember üzerinde herhangi bir nokta ve $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ olsun. Bu durumda

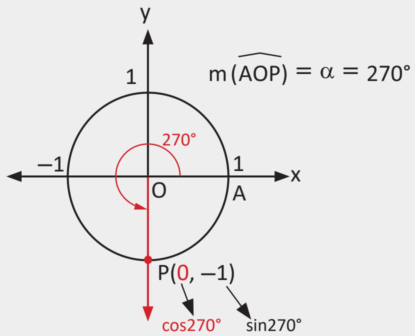
$\alpha = 270°$ ya da $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ radyan olduğunda

P noktasının koordinatları

P(cos270°, sin270°) = P(0, –1) olur.

Buna göre

$\cos 270° = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin 270° = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ olur.

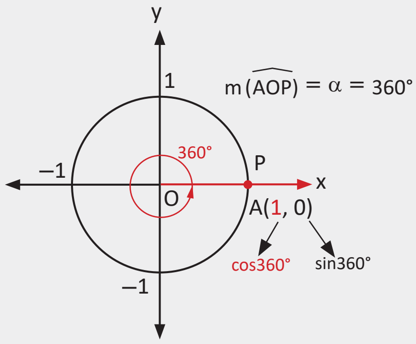


$\alpha = 360°$ ya da $\alpha = 2\pi$ olduğunda

P noktasının koordinatları

P(cos360°, sin360°) = P(1, 0) olur. Buna göre

$\cos 360° = 1$, $\sin 360° = 0$ olur.



13. Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{3 + \sin^2 x}{2 - \cos x} - 2$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

Verilen ifadede $\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ yazıldığında ifadenin en sade hâli

$$\frac{3 + (1 - \cos^2 x)}{2 - \cos x} - 2 = \frac{4 - \cos^2 x}{2 - \cos x} - 2 = \frac{(2 + \cos x)\cdot(2 - \cos x)}{2 - \cos x} - 2$$

$$= 2 + \cos x - 2 = \cos x \text{ olur.}$$

14. Örnek

$\cos x \neq -1$ olmak üzere $\frac{1 + \cos x - \sin^2 x}{-1 - \cos x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

Verilen ifadede $\sin^2 x$ yerine $1 - \cos^2 x$ yazıldığında ifadenin en sade hâli

$$\frac{1 + \cos x - (1 - \cos^2 x)}{-1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x - 1 + \cos^2 x}{-(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\cos x\cdot(1 + \cos x)}{-(1 + \cos x)} = -\cos x \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \cos^2 x$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

15. Örnek

$x \in \mathbb{R}$ için $2 + 3\cos x$ ifadesinin en büyük değeri ile en küçük değerini bulunuz.

Çözüm

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan

$$-3 \leq 3\cos x \leq 3$$
$$-3 + 2 \leq 2 + 3\cos x \leq 3 + 2$$
$$-1 \leq 2 + 3\cos x \leq 5 \text{ olur.}$$

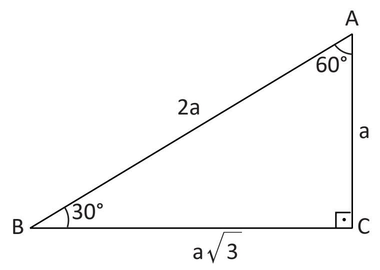
Bu durumda $2 + 3\cos x$ için en küçük değer -1, en büyük değer 5 olur.

Sıra Sizde

x ve y birbirinden bağımsız reel sayılar olmak üzere $A = 3\sin x - 4\cos y$ ifadesinin <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

Hatırlatma

30°-60°-90° dik üçgeninde 30° lik açının karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir. 60° lik açının karşısındaki kenarın uzunluğu hipotenüs uzunluğunun yarısının $\sqrt{3}$ katına eşittir.



16. Örnek

Ölçüsü 240° olan açının sinüs ve kosinüs değerlerini bulunuz.

Çözüm

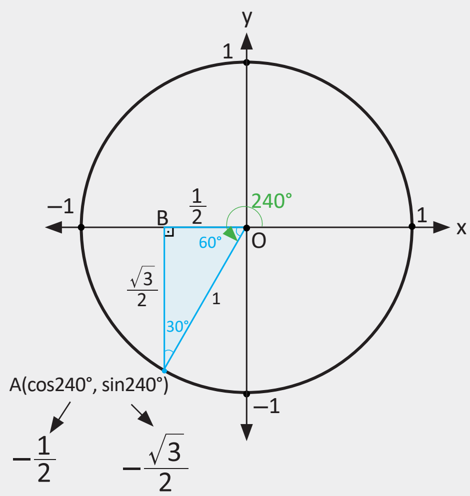
240° lik açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta A olsun. Bu durumda ABO özel dik üçgeninde

$|OB| = \frac{1}{2}$

$|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

A noktasının koordinatları $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olur.

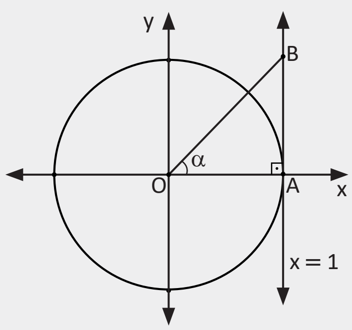
$\cos 240° = -\frac{1}{2}$, $\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak bulunur.



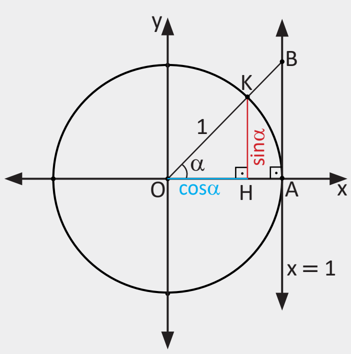
Tanım

f: ℝ → [−1, 1], f(x) = cosx biçiminde tanımlanan fonksiyona **kosinüs fonksiyonu**,
g: ℝ → [−1, 1], g(x) = sinx biçiminde tanımlanan fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir.

17. Örnek



Yandaki şekilde x = 1 doğrusu birim çembere A noktasında teğettir. $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olduğuna göre AB uzunluğunu α cinsinden bulunuz.



Çözüm

AOB açısının OB kenarının birim çemberi kestiği nokta K, K dan x eksenine indirilen dikmenin ayağı H olsun.

Birim çemberde |OH| = cosα ve |KH| = sinα olur.

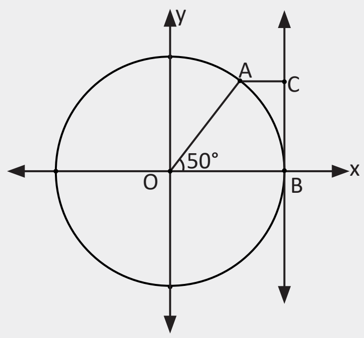
$\widehat{KHO} \sim \widehat{BAO}$ (A.A. benzerliği) olduğundan $\frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|KH|}{|BA|}$ olur. Buradan

$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ olarak bulunur.

Hatırlatma

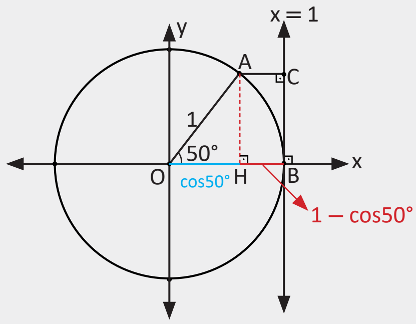
Ölçüleri toplamı 90° olan açılardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne eşittir.
a ve b iki açının ölçüleri olmak üzere
$\mathbf{a + b = 90°}$ veya $\mathbf{a + b = \frac{\pi}{2}}$ olduğunda **sina = cosb** olur.

18. Örnek



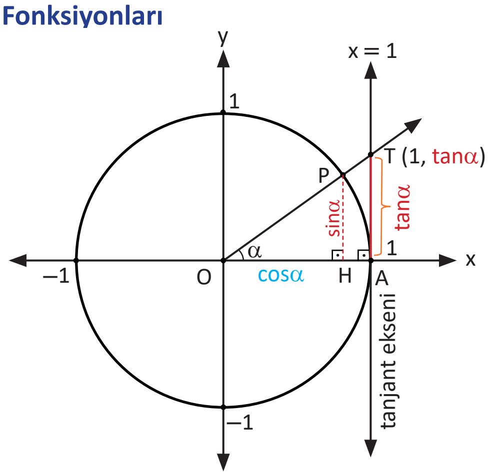
x = 1 doğrusu merkezil çembere B noktasında teğettir. [AC] x eksenine paralel, $m(\widehat{BOA}) = 50°$ olduğuna göre AC uzunluğunu sinüs cinsinden bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde A noktasından x eksenine indirilen dikmenin ayağı H olsun. Buna göre
$|OH| = \cos 50°$ olur.
x = 1 doğrusu çembere B noktasında teğet olduğuna göre O merkezli çember birim çemberdir. Bu durumda
$|AC| = |HB| = 1 - \cos 50°$ $(\cos 50° = \sin 40°)$
$|AC| = 1 - \sin 40°$ olur.

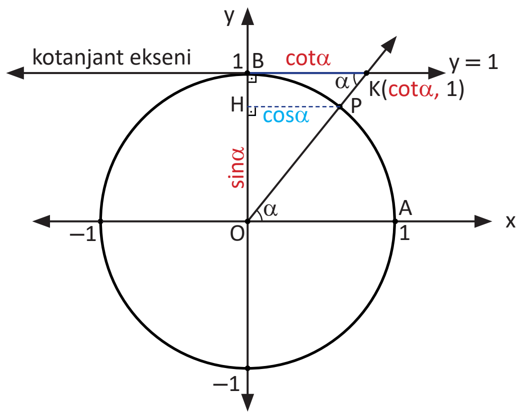
Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları



Birim çember üzerinde P noktası verilsin ve bu noktayı orijinle birleştiren [OP nın x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α olsun.
A(1, 0) noktasında birim çembere teğet olan x = 1 doğrusuna **tanjant ekseni** denir.
AOP açısının bitiş kenarının tanjant eksenini kestiği T noktasının ordinatına α **açısının tanjantı** denir ve bu ifade tanα ile gösterilir. |TA| = tanα olur.

Yukarıdaki şekilde OPH ve OTA benzer üçgenlerdir. Benzerlik bağıntıları yazıldığında
$\frac{|PH|}{|TA|} = \frac{|OH|}{|OA|}$ olur. Buradan

$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ elde edilir.



Birim çember üzerinde P noktası verilsin ve bu noktayı orijinle birleştiren [OP nın x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü α olsun.

B(0, 1) noktasında birim çembere teğet olan y = 1 doğrusuna **kotanjant ekseni** denir.

AOP açısının bitiş kenarının kotanjant eksenini kestiği K noktasının apsisine α **açısının kotanjantı** denir ve bu ifade cotα ile gösterilir. |BK| = cotα olur.

Yukarıdaki şekilde OPH ve OKB benzer üçgenlerdir. Benzerlik bağıntıları yazıldığında

$\dfrac{|PH|}{|KB|} = \dfrac{|OH|}{|OB|}$ olur. Buradan $\dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ elde edilir.

Sonuç

$k \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\cdot k$ olmak üzere $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ olur.

19. Örnek

Ölçüleri 270° ve 360° olan açıların tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

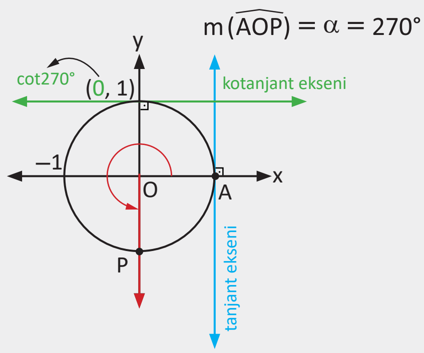
Çözüm

$\alpha = 270°$ ya da $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ radyan olduğunda AOP açısının bitiş kenarı tanjant eksenini kesmez.

tan270° tanımsız olur.

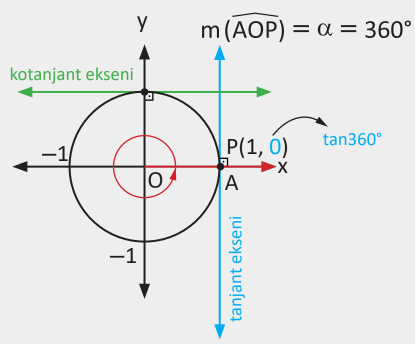
$\alpha = 270°$ ya da $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ radyan olduğunda AOP açısının bitiş kenarının üzerinde bulunduğu doğru kotanjant eksenini (0, 1) noktasında keser.

cot270° = 0 olur.



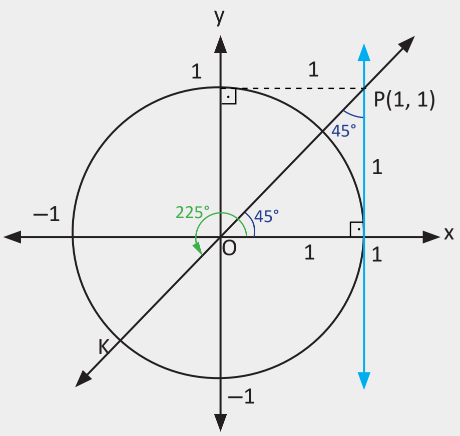
Yandaki birim çemberde AOP açısının ölçüsü α olsun. $\alpha = 360°$ ya da $\alpha = 2\pi$ olduğunda AOP açısının bitiş kenarı tanjant eksenini P(1, 0) noktasında keser. O hâlde **tan360° = 0** olur.

$\alpha = 360°$ ya da $\alpha = 2\pi$ olduğunda AOP açısının bitiş kenarı kotanjant eksenini kesmez. O hâlde **cot360° tanımsız** olur.



20. Örnek

Birim çemberden faydalanarak tan225° değerini bulunuz.



Çözüm

225° lik açının bitiş kenarının üzerinde bulunduğu doğru tanjant eksenini P(1, 1) noktasında keser. O hâlde $\tan 225° = \tan 45° = 1$ olur.

Tanım

$f: \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona **tanjant fonksiyonu**, $g: \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cot x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.

Sıra Sizde

Tanımlı olduğu aralıkta $\dfrac{\cos x - \dfrac{1}{\sin x}}{\sin x - \dfrac{1}{\cos x}}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

21. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$$\underset{(1-\cos\alpha)}{\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}} - \underset{(1+\cos\alpha)}{\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{-2\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\cot\alpha \quad \text{olur.}$$

22. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $\dfrac{2\sin x + 3\cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \dfrac{1}{3}$ olduğuna göre cotx değerini bulunuz.

Çözüm

$6\sin x + 9\cos x = 5\sin x - 4\cos x$

$\sin x = -13\cos x \Rightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\dfrac{1}{13} \Rightarrow \cot x = -\dfrac{1}{13}$ olur.

23. Örnek

$\tan^2 x + \cot^2 x = 3$ olduğuna göre tanx + cotx ifadesinin pozitif değerini bulunuz.

Çözüm

tanx + cotx = A olsun. Bu durumda eşitlikte her iki tarafın karesi alındığında

$A^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \underbrace{\tan^2 x + \cot^2 x}_{3} + 2\underbrace{\tan x \cdot \cot x}_{1}$ olur.

$= 3 + 2 = 5$

$A^2 = 5 \Rightarrow A = \sqrt{5}$ veya $A = -\sqrt{5}$ olur.

Pozitif değer istendiği için sonuç $\sqrt{5}$ olur.

24. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cot^2 x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

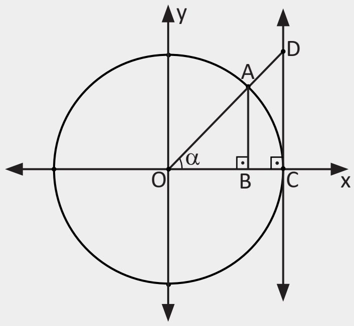
$$\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

Sıra Sizde

Tanımlı olduğu aralıkta $\dfrac{1 - \sin x}{\tan x} : \dfrac{\cot x}{1 + \sin x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

25. Örnek

Yandaki şekilde O merkezli birim çember verilmiştir. [AB]⊥[OC], [DC]⊥[OC], $m(\widehat{BOA}) = \alpha$ olduğuna göre ABCD yamuğunun alanının α dar açısı cinsinden kaç birimkare olduğunu bulunuz.

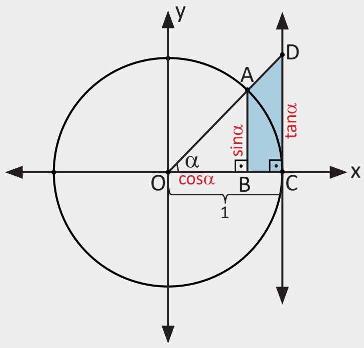


Çözüm

$|OB| = \cos\alpha$, $|AB| = \sin\alpha$ ve $|DC| = \tan\alpha$ olduğundan

$|BC| = 1 - \cos\alpha$ olur. Buradan

ABCD yamuğunun alanı (alt taban ile üst taban toplamının yükseklik ile çarpımının yarısı)



$$A(ABCD) = \frac{\sin\alpha + \tan\alpha}{2} \cdot (1 - \cos\alpha)$$

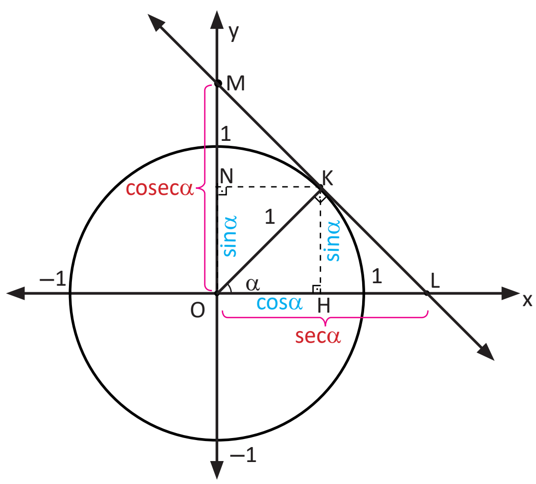
$$= \frac{\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2} \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha} \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot (1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$$ birimkare olur.

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları



$m(\widehat{HOK}) = \alpha$ olmak üzere birim çember üzerindeki K noktasından çizilen teğetin x eksenini kestiği L noktasının apsisine **α açısının sekantı** denir ve bu ifade **secα** ile gösterilir. $|OL| = \sec\alpha$ olur. K noktasından çizilen teğetin y eksenini kestiği M noktasının ordinatına **α açısının kosekantı** denir ve bu ifade **cosecα** ile gösterilir. $|OM| = \operatorname{cosec}\alpha$ olur.

Yukarıdaki birim çemberde KOH ile LOK üçgenlerinde $m(\widehat{HKO}) = m(\widehat{OLK})$ olur. Buna göre KOH ile LOK üçgenleri benzer üçgenler olur. Benzerlik oranı yazıldığında

$$\frac{|OH|}{|OK|} = \frac{|OK|}{|OL|} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha} \Rightarrow \boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$ olur.

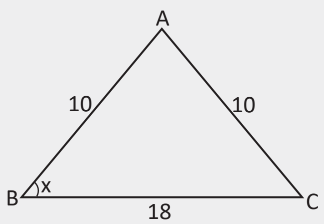
Aynı şekilde KON ile MOK üçgenlerinin benzerliğinden $\boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}$ elde edilir.

Tanım

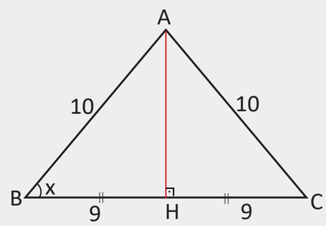
f: $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)$, f(x) = secx şeklinde tanımlanan fonksiyona **sekant fonksiyonu**,

g: $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} - (-1, 1)$, g(x) = cosecx şeklinde tanımlanan fonksiyona **kosekant fonksiyonu** denir.

26. Örnek



Yandaki ABC ikizkenar üçgeninde |AB| = |AC| = 10 birim, |BC| = 18 birim ve $m(\widehat{ABC}) = x$ olduğuna göre secx değerini bulunuz.



Çözüm

Dik üçgen oluşturmak için A noktasından tabana bir dikme indirilir. ABC üçgeni ikizkenar olduğundan dikmenin ayağı olan H noktası [BC] kenarını ortalar.

$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$ olur.

27. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $1 + \tan^2 x$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x$ olur.

28. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $1 + \cot^2 x$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 x$ olur.

Sonuç

Tanımlı olduğu aralıkta

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ olur.

29. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$$\underset{(1-\cos x)}{\frac{1-\cos x}{\sin x}}+\underset{(\sin x)}{\frac{\sin x}{1-\cos x}}=\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$
$$=\frac{1+1-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$
$$=\frac{2-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$
$$=\frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$
$$=\frac{2}{\sin x}=2\operatorname{cosec} x \text{ olur.}$$

30. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $3\sec^2 x-5=5\tan x$ olduğuna göre $\cot x$ değerlerini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{3}{\cos^2 x}-5=\frac{5\sin x}{\cos x}$$
$$3-5\cos^2 x=\frac{5\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x$$
$$3-5\cos^2 x=5\sin x\cdot\cos x$$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ olduğundan

$3(\cos^2 x+\sin^2 x)-5\cos^2 x=5\sin x\cdot\cos x$ olur. Buradan

$3\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0$

3sinx cosx

sinx −2cosx

$3\sin x=-\cos x \Rightarrow \cot x=-3$ veya

$\sin x=2\cos x \Rightarrow \cot x=\frac{1}{2}$ olur.

31. Örnek

Tanımlı olduğu aralıkta $\cot x+\frac{\sin x}{1+\cos x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$$\cot x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\underset{(1+\cos x)}{\frac{\cos x}{\sin x}}+\underset{(\sin x)}{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$$
$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)\cdot\sin x}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)\cdot\sin x}=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x \text{ olur.}$$

32. Örnek

$\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ olduğuna göre secx + cosecx toplamının değerini bulunuz.

Çözüm

$$\sec x + \operatorname{cosec} x = \underset{(\sin x)}{\frac{1}{\cos x}} + \underset{(\cos x)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

sinx·cosx değerini elde etmek için $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ eşitliğinin her iki yanının karesi alındığında

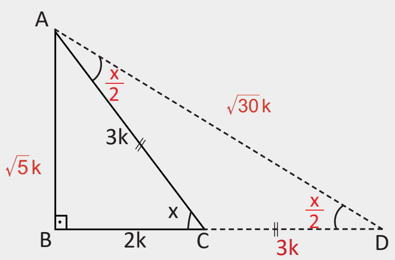
$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x = \frac{4}{9} - 1$$

$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{5}{18}$ olur. Buradan

$$\sec x + \operatorname{cosec} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{5}{18}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{18}{5} = -\frac{12}{5} \text{ olur.}$$

33. Örnek

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\sec x = \frac{3}{2}$ olduğuna göre $\sec \frac{x}{2}$ değerini bulunuz.



Çözüm

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$ olur.

Yandaki ABC dik üçgeni $\cos x = \frac{2}{3}$ olacak şekilde çizildiğinde $|BC| = 2k$ ve $|AC| = 3k$ olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$(2k)^2 + |AB|^2 = (3k)^2 \Rightarrow 4k^2 + |AB|^2 = 9k^2$

$\Rightarrow |AB|^2 = 5k^2$

$\Rightarrow |AB| = \sqrt{5}\,k$ olur.

Ölçüsü $\frac{x}{2}$ radyan olan açıyı oluşturmak için BC kenarı $|CD| = |AC|$ olacak şekilde uzatılır.

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ADC}) = \frac{x}{2}$ olur.

ABD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında $|AD| = \sqrt{30}\,k$ olur. Buradan

$$\sec \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{5k}{\sqrt{30}\,k}} = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{ olur.}$$

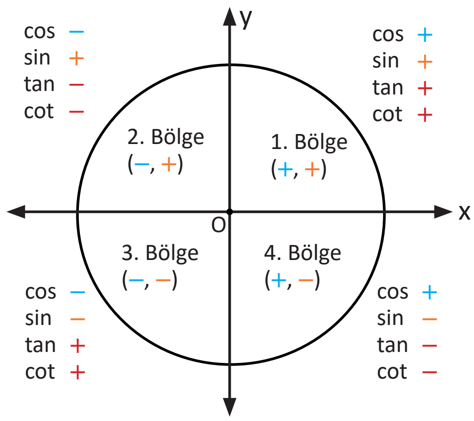
Sıra Sizde

Tanımlı olduğu aralıkta $\frac{\sec x + \operatorname{cosec} x}{\tan x + \cot x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri

Ölçüsü α olan bir açının herhangi bir trigonometrik değerinin işaretini belirlemek için bu açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği noktanın koordinatlarına bakılır. Bu noktanın apsisinin işareti $\cos\alpha$ nın, ordinatının işareti $\sin\alpha$ nın işaretidir.

Yandaki şekilde bir noktanın koordinatlarının bölgelere göre hangi işaretleri alacağı gösterilmiştir.



34. Örnek

$\cos 1550°$, $\tan\dfrac{28\pi}{9}$ ve $\sin\left(-\dfrac{72\pi}{5}\right)$ trigonometrik değerlerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm

$\cos 1550° = \cos(4.360° + 110°) = \cos 110° < 0$ (2. bölge)

$\tan\dfrac{28\pi}{9} = \tan\left(1\cdot 2\pi + \dfrac{10\pi}{9}\right) = \tan\dfrac{10\pi}{9} \Rightarrow \tan 200° > 0$ (π = 180°; 3. bölge)

$\sin\left(-\dfrac{72\pi}{5}\right) = \sin\left(-8\cdot 2\pi + \dfrac{8\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{8\pi}{5} \Rightarrow \sin 288° < 0$ (4. bölge)

Bir Açının Trigonometrik Değerlerinin Dar Açı Cinsinden Yazılması

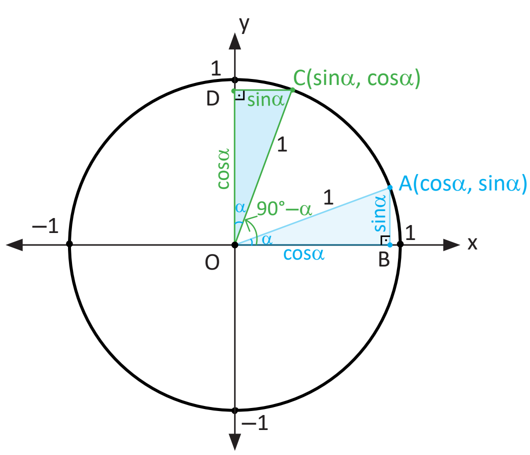
Başlangıç kenarı x ekseninin pozitif tarafı olan pozitif yönlü bir dar açının ölçüsü α olsun. Bu açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği A noktasının koordinatları **A(cosα, sinα)** biçimindedir.

1. Birinci Bölgede Olan Açıların Trigonometrik Değerleri

Analitik düzlemin birinci bölgesinde olan açılar, α bir dar açının ölçüsü olmak üzere $90° - \alpha$ biçiminde ifade edilebilir.

Bu açıların trigonometrik değerleri α nın trigonometrik değerleri cinsinden yazılabilir.

Ölçüsü **90° − α** olan açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta C olsun. AOB üçgeni ile COD üçgeni eş (A.K.A.) olduğundan C noktasının koordinatları **C(sinα, cosα)** olur.



Buna göre

α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(90°-\alpha) = \cot\alpha$	$\cot(90°-\alpha) = \tan\alpha$

olur.

α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

olur.

Sonuç

İki açının ölçüleri toplamı 90° olduğunda bu açılardan birinin sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerleri diğer açının sırasıyla kosinüs, sinüs, kotanjant ve tanjant değerlerine eşittir.

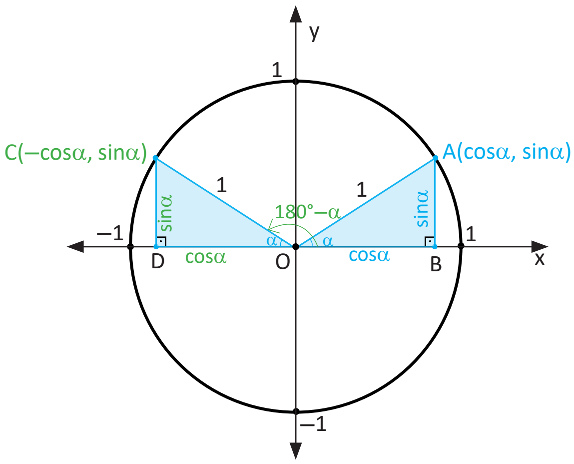
$\cos 20° = \sin 70°$ $\cot 79° = \tan 11°$

2. İkinci Bölgede Olan Açıların Trigonometrik Değerleri

Analitik düzlemin ikinci bölgesinde olan açılar $180° - \alpha$ veya $90° + \alpha$ biçiminde ifade edilebilir. Bu açıların trigonometrik değerleri α nın trigonometrik değerleri cinsinden yazılabilir.

Aşağıdaki birim çemberde görüldüğü gibi ölçüsü **$180° - \alpha$** olan açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta C olsun.

Bu durumda AOB ve COD üçgenleri eş olduğundan C noktasının koordinatları C**$(-\cos\alpha, \sin\alpha)$** olur.



Buna göre

α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$
$\tan(180°-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(180°-\alpha) = -\cot\alpha$

olur.

α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$
$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

olur.

Sonuç

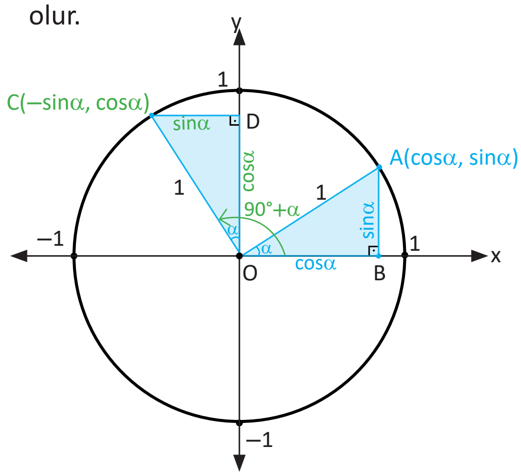
İki açının ölçüleri toplamı 180° olduğunda bu açılardan birinin kosinüs, tanjant ve kotanjant değerleri diğer açının sırasıyla kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerinin negatiflerine eşittir.

İki açının ölçüleri toplamı 180° olduğunda bu açıların sinüs değerleri birbirine eşittir.

$\cos 120° = -\cos 60°$ $\cot 179° = -\cot 1°$

$\tan 145° = -\tan 35°$ $\sin 150° = \sin 30°$

Aşağıdaki birim çemberde ölçüsü **$90° + \alpha$** olan açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta C olsun. AOB ve COD dik üçgenlerinin A.K.A. eşliğinden C noktasının koordinatları **$C(-\sin\alpha, \cos\alpha)$** olur.



Buna göre

α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(90°+\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(90°+\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(90°+\alpha) = -\tan\alpha$

olur.

α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

olur.

35. Örnek

x bir dar açının ölçüsü olmak üzere $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin(9\pi-x)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

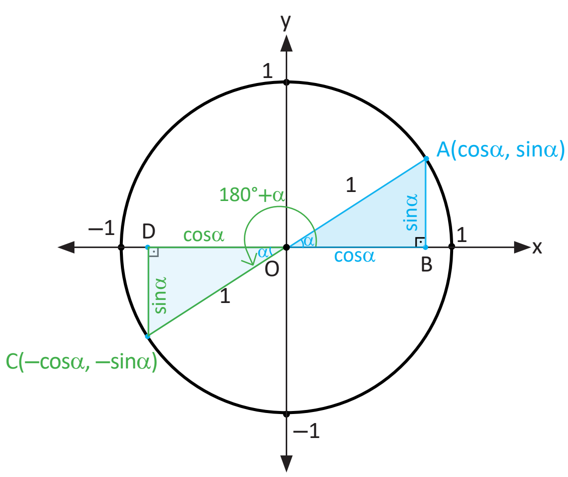
$\frac{5\pi}{2}$ nin esas ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ olur. Bu durumda $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ olur.

9π nin esas ölçüsü π olur. Bu durumda $\sin(9\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$ olur. Buna göre

$\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin(9\pi-x)=\sin x+\sin x=2\sin x$ olur.

3. Üçüncü Bölgede Olan Açıların Trigonometrik Değerleri

Analitik düzlemin üçüncü bölgesindeki açılar $180°+\alpha$ veya $270°-\alpha$ biçiminde ifade edilebilir.
Bu açıların trigonometrik değerleri α nın trigonometrik değerleri cinsinden yazılabilir.
Aşağıdaki birim çemberde görüldüğü gibi ölçüsü **180° + α** olan açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta C olsun.
AOB ile COD üçgenlerinin A.K.A. eşliğinden C noktasının koordinatları **C(−cosα, −sinα)** olur.



Buna göre
α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(180°+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(180°+\alpha)=\cot\alpha$

olur.
α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

olur.

36. Örnek

Ölçüsü 210° olan açının trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm

210° üçüncü bölgede bir açıdır.
Bu bölgede sin, cos, tan, cot işaretleri sırasıyla (−, −, +, +) olur.

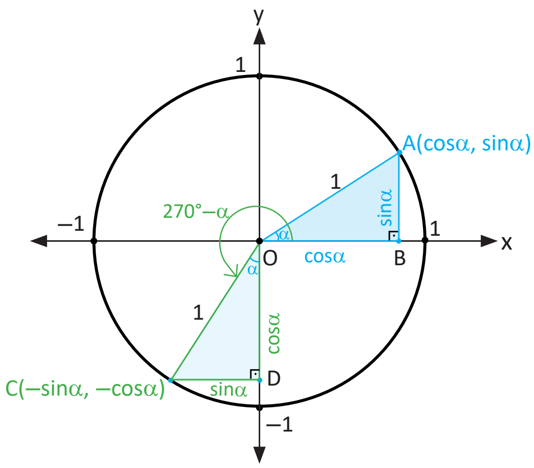
$\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$,

$\cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 210°=\tan(180°+30°)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cot 210°=\cot(180°+30°)=\cot 30°=\sqrt{3}$ olur.

Ölçüsü **270°– α** olan açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta C olsun.
AOB ile COD üçgenlerinin A.K.A. eşliğinden C noktasının koordinatları **C(–sinα, –cosα)** olur.



Buna göre
α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(270°-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(270°-\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(270°-\alpha) = \cot\alpha$	$\cot(270°-\alpha) = \tan\alpha$

olur.
α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$

olur.

37. Örnek

Ölçüsü 240° olan açının sinüs ve tanjant değerlerini bulunuz.

Çözüm

240° üçüncü bölgede bir açıdır.
Bu bölgede sinüs ve tanjant işaretleri sırasıyla (–, +) olur.

$\sin 240° = \sin(270° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$\tan 240° = \tan(270° - 30°) = \cot 30° = \sqrt{3}$ olur.

38. Örnek

$\tan(3\pi + \alpha) + \cot\left(\frac{35\pi}{2} - \alpha\right)$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$\tan(3\pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot\left(\frac{35\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

$\tan(3\pi + \alpha) + \cot\left(\frac{35\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha + \tan\alpha$

$= 2\tan\alpha$ olur.

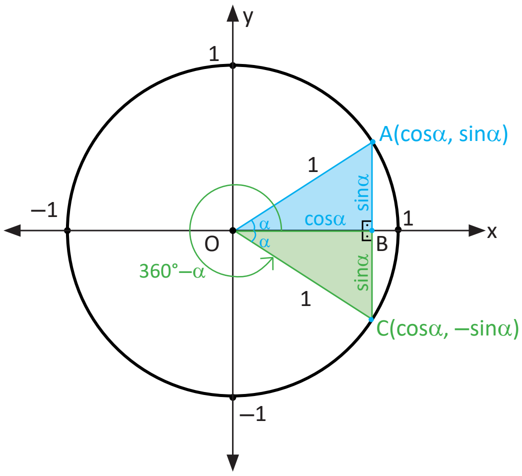
Sıra Sizde

$\cos(5\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{19\pi}{2} - \alpha\right)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

4. Dördüncü Bölgede Olan Açıların Trigonometrik Değerleri

Analitik düzlemin dördüncü bölgesindeki açılar $360° - \alpha$ veya $270° + \alpha$ biçiminde ifade edilebilir. Bu açıların trigonometrik değerleri α nın trigonometrik değerleri cinsinden yazılabilir.

Ölçüsü **$360° - \alpha$** olan açının bitiş kenarının birim çemberi kestiği nokta C olsun. AOB ile COB üçgenlerinin A.K.A. eşliğinden C noktasının koordinatları **C(cosα, $-$sinα)** olur.



Buna göre

α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(360°-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(360°-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(360°-\alpha) = -\cot\alpha$

olur.

α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

olur.

39. Örnek

Ölçüsü 330° olan açıların trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm

Ölçüsü 330° olan açı dördüncü bölgededir.

Bu bölgede sin, cos, tan, cot işaretleri sırasıyla ($-$, $+$, $-$, $-$) olur.

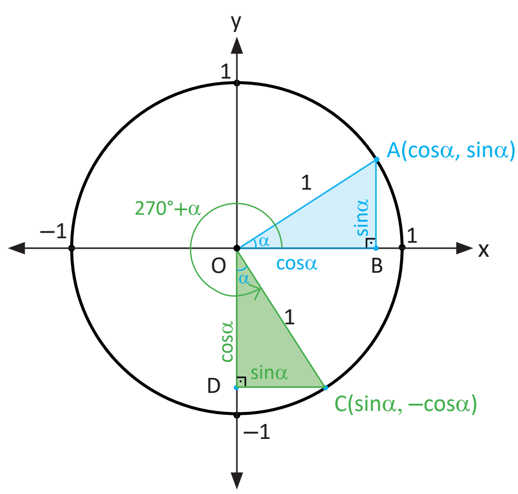
$\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$,

$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 330° = \tan(360° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cot 330° = \cot(360° - 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$ olur.

Aşağıdaki şekilde 4. bölgedeki ölçüsü **$270° + \alpha$** olan açının birim çemberi kestiği nokta C olsun. AOB ile COD dik üçgenlerinin A.K.A. eşliğinden C noktasının koordinatları **C(sinα, $-$cosα)** olur.



Buna göre

α nın birimi derece olmak üzere

$\cos(270°+\alpha) = \sin\alpha$	$\sin(270°+\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(270°+\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(270°+\alpha) = -\tan\alpha$

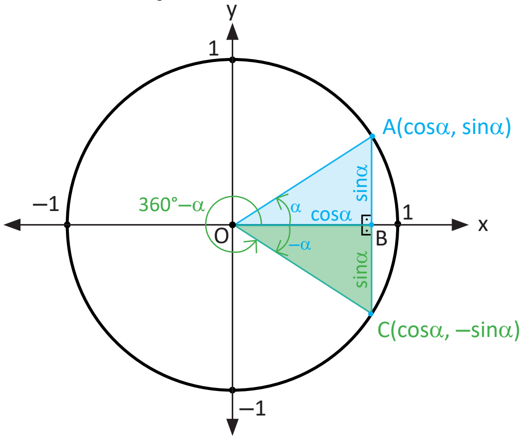
olur.

α nın birimi radyan olmak üzere

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$
$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

olur.

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi dördüncü bölgede ölçüsü **$-\alpha$** ve **$360°-\alpha$** olan açıların bitiş kenarı birim çemberi C noktasında keser. C noktasının koordinatları **C($\cos\alpha$, $-\sin\alpha$)** olur.



Buna göre

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

olur.

Sonuç

Herhangi bir açının trigonometrik değeri dar açı cinsinden yazılırken
180° (π) veya 360°(2π) kullanılırsa trigonometrik fonksiyon isim değiştirmez,
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ veya 270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ kullanılırsa trigonometrik fonksiyon isim değiştirir.

40. Örnek

$$\frac{\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{35\pi}{3}\right)}$$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$-\frac{21\pi}{2}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\frac{3\pi}{2}$,

$\frac{55\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\frac{\pi}{3}$,

$\frac{35\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\frac{5\pi}{3}$ olur.

Trigonometrik değerler $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ ve $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ olur. Buradan

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{-1+\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$ olur.

41. Örnek

$\tan(-\alpha)+\cot\left(\frac{27\pi}{2}+\alpha\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot\left(\frac{27\pi}{2}+\alpha\right)=\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$ olur. Buradan

$\tan(-\alpha)+\cot\left(\frac{27\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha-\tan\alpha=-2\tan\alpha$ olur.

42. Örnek

sin135° + cos315° – tan225° ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

sin(180° – 45°) + cos(360° – 45°) – tan(180° + 45°) = sin45° + cos45° – tan45°

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$ olur.

Sıra Sizde

$\frac{\cot 295°}{\tan 155°}$ ifadesinin değerini bulunuz.

43. Örnek

$\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{7\pi}{4}}{\cos^2\frac{7\pi}{6}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$\cot\frac{7\pi}{4} = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4}$ değeri, verilen ifadede yerine yazıldığında

$\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{7\pi}{6}} = \dfrac{1-1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{0}{\frac{3}{4}} = 0$ olur.

44. Örnek

$\dfrac{[1 - \sin^2(240°)] \cdot \sin 790°}{\cos(-1460°) \cdot \tan 1665°}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$\sin^2 240° + \cos^2 240° = 1$ olduğundan $1 - \sin^2 240° = \cos^2 240°$

$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

sin790° = sin70° = cos20°

tan1665° = tan225° = tan(180° + 45°) = tan45° = 1 olur.

cos(–1460°) = cos340° = cos(360° – 20°) = cos20° değerleri, verilen ifadede yerlerine yazıldığında

$\dfrac{\cos^2 240° \cdot \sin 70°}{\cos 20° \cdot \tan 45°} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \dfrac{1}{4}$ olur.

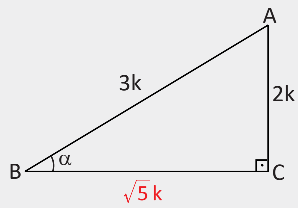
45. Örnek

$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere $\sin\theta = \frac{2}{3}$ verildiğine göre $\cos^2\theta + \tan^2\theta$ toplamını bulunuz.

Çözüm

1. Yol

α bir dar açı olsun. θ ikinci bölgede olduğundan
$\theta = 180° - \alpha$ olarak yazılır. Buradan
$\sin\theta = \sin(180° - \alpha) \Rightarrow \sin\theta = \sin\alpha = \frac{2}{3}$
$\cos\theta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan\theta = \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$ olur.
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olacak şekilde ABC dik üçgeni çizilir.
Pisagor teoremi uygulandığında $|BC| = \sqrt{5}\,k$ olur.
Buna göre



$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ve } \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ olur.}$$

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta = \cos^2\alpha + \tan^2\alpha$$
$$= \frac{5}{9} + \frac{4}{5} = \frac{61}{45} \text{ olur.}$$

2. Yol

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ olduğundan $\cos^2\theta + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{5}{9}$ olur.

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5} \text{ olur. Buradan}$$

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{9} + \frac{4}{5} = \frac{61}{45} \text{ olur.}$$

46. Örnek

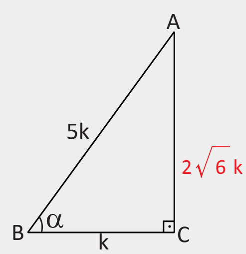
$\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\cos\theta = -\frac{1}{5}$ verildiğine göre $\sin(\pi+\theta)\cdot\cot\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ çarpımını bulunuz.

Çözüm

α bir dar açı olsun. θ üçüncü bölgede olduğundan
$\theta = \pi + \alpha$ olarak yazılır. Buradan
$\cos\theta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\theta = -\cos\alpha = -\frac{1}{5}$
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}$
$\sin(\pi + \theta) = \sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$$\cot\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$
$$= \cot\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\tan\alpha \text{ olur.}$$

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olacak şekilde ABC üçgeni çizilir.
Pisagor teoremi uygulandığında $|AC| = 2\sqrt{6}\,k$ olur.



$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ ve } \tan\alpha = 2\sqrt{6} \text{ olur.}$$

$$\sin(\pi+\theta)\cdot\cot\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cdot(-\tan\alpha)$$
$$= \frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot(-2\sqrt{6}) = -\frac{24}{5} \text{ olur.}$$

47. Örnek

$\sin 110° = x$ olduğuna göre $\sin 20° + \cos 290°$ toplamının x cinsinden değerini bulunuz.

Çözüm

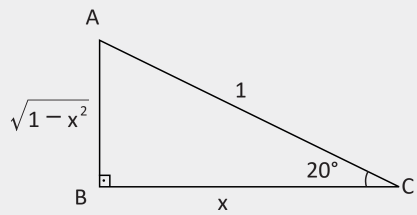
$\sin 110° = \sin(90° + 20°) = \cos 20° = x$

$\cos 290° = \cos(270° + 20°) = \sin 20°$ olur. Buradan

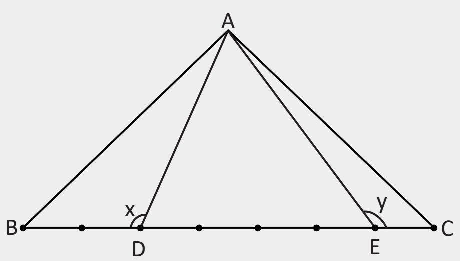
$\sin 20° + \cos 290° = \sin 20° + \sin 20° = 2\sin 20°$ olur.

$\cos 20° = x$ olacak şekilde yandaki gibi bir dik üçgen çizildiğinde $\sin 20° = \sqrt{1-x^2}$ olur. Buradan

$\sin 20° + \cos 290° = 2\sin 20° = 2\sqrt{1-x^2}$ olur.



48. Örnek



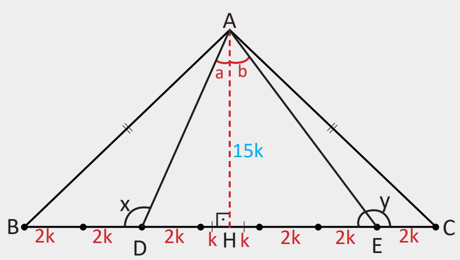
Yandaki ABC ikizkenar üçgeninde [BC] yedi eş parçaya ayrılıyor.

[BC] üzerinde $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{2}{7}$ ve $\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{6}{7}$

olacak şekilde D ve E noktaları veriliyor.

$m(\widehat{ADB}) = x$, $m(\widehat{CEA}) = y$, $|AB| = |AC|$ ve

$\tan x + \tan y = -8$ olduğuna göre $\cot(\widehat{ABC})$ değerini bulunuz.



Çözüm

ABC ikizkenar üçgen olduğundan çizilen AH yüksekliği BC tabanını iki eş parçaya böler.

$|EC| = 2k$ olsun. Bu durumda

$|HE| = 5k$, $|DH| = 3k$ olur.

$m(\widehat{DAH}) = a$ ve $m(\widehat{HAE}) = b$ olsun.

$x = 90° + a$ ve $y = 90° + b$ olur.

$\tan x = \tan(90° + a) = -\cot a = -\frac{|AH|}{3k}$

$\tan y = \tan(90° + b) = -\cot b = -\frac{|AH|}{5k}$ olur. Buradan

$\tan x + \tan y = -\frac{|AH|}{3k} - \frac{|AH|}{5k} = -8 \Rightarrow \frac{5|AH|}{15k} + \frac{3|AH|}{15k} = 8$ olur. Buradan

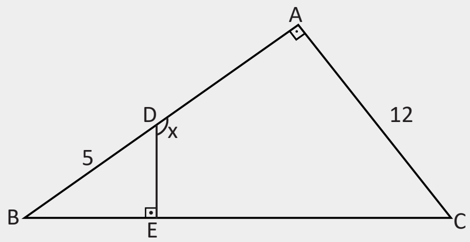
$8|AH| = 8 \cdot 15k \Rightarrow |AH| = 15k$ olur.

ABH dik üçgeninde $\cot(\widehat{ABC}) = \frac{|BH|}{|AH|} \Rightarrow \cot(\widehat{ABC}) = \frac{7k}{15k} = \frac{7}{15}$ olur.

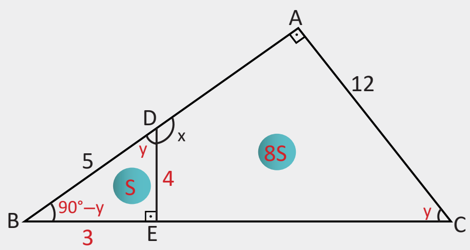
Hatırlatma

Benzer iki üçgenin alanlarının oranı bu iki üçgenin benzerlik oranının karesine eşittir.

49. Örnek



Yandaki ABC dik üçgeninde [AB]⊥[AC], [ED]⊥[BC], |BD| = 5 birim, |AC| = 12 birim ve $\dfrac{A(\widehat{BDE})}{A(ADEC)} = \dfrac{1}{8}$ olduğuna göre cotx değerini bulunuz.



Çözüm

A.A. benzerliğinden $\widehat{EDB} \sim \widehat{ACB}$ olduğu görülür.

$\dfrac{A(\widehat{BDE})}{A(\widehat{BCA})} = \dfrac{1}{9}$ olur.

Benzer iki üçgenin alanlarının oranı bu iki üçgenin benzerlik oranının karesine eşit olduğundan benzerlik oranı $k = \dfrac{1}{3}$ olur.

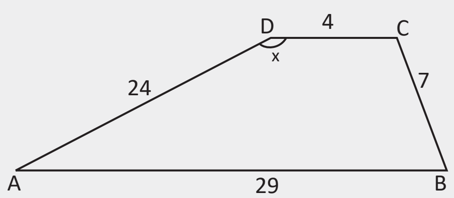
$\dfrac{|DE|}{|AC|} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{|DE|}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow |DE| = 4$ birim olur.

BED dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında |BE| = 3 ve $\cot y = \dfrac{4}{3}$ olur.

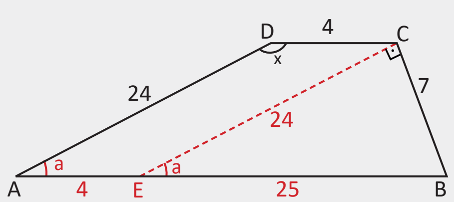
$x + y = 180° \Rightarrow x = 180° - y$ olur. Eşitliğin her iki tarafının kotanjantı alındığında

$\cot x = \cot(180° - y) = -\cot y \Rightarrow \cot x = -\dfrac{4}{3}$ olur.

50. Örnek



Yandaki şekilde ABCD bir yamuktur. [DC] // [AB], |AD| = 24 birim, |DC| = 4 birim, |CB| = 7 birim, |AB| = 29 birim ve $m(\widehat{ADC}) = x$ olduğuna göre tanx değerini bulunuz.



Çözüm

AD kenarına paralel olacak şekilde CE doğru parçası çizildiğinde AECD dörtgeni paralelkenar olur. Buradan |AD| = |EC| = 24 birim olur.

7-24-25 özel dik üçgeninden $m(\widehat{ECB}) = 90°$ olur.

$m(\widehat{BAD}) = a$ olsun. [DA] // [CE] olduğundan $m(\widehat{BEC}) = a$ olur.

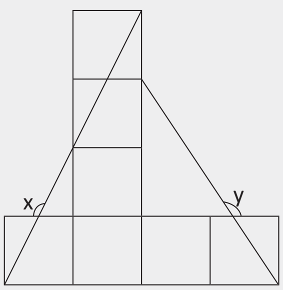
$x + a = 180° \Rightarrow x = 180° - a$

$\tan x = \tan(180° - a) = -\tan a$ olur.

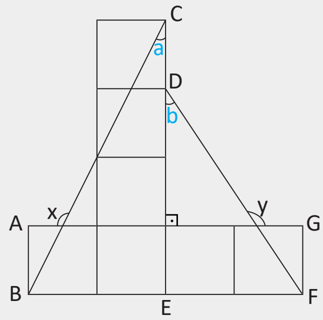
$\tan a = \dfrac{7}{24} \Rightarrow \tan x = -\dfrac{7}{24}$ olur.

51. Örnek

Birimkarelerden oluşan yandaki şekilde x ve y açıları veriliyor. $\tan x + \cot y$ değerini bulunuz.



Çözüm



$m(\widehat{BCE}) = a$ olsun. Buradan

$x = 90 + a$

$\tan x = \tan(90 + a) = -\cot a = -\frac{4}{2} = -2$ olur.

$m(\widehat{EDF}) = b$ olsun. Buradan

$y = 90 + b$

$\cot y = \cot(90 + b) = -\tan b = -\frac{2}{3}$ olur.

$\tan x + \cot y = -2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$ olur.

52. Örnek

$\cos\alpha = x$ olmak üzere

$\cos(-\alpha) + \sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(-\alpha) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ işleminin sonucunu x cinsinden bulunuz.

Çözüm

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$ olarak bulunur.

Bulunan değerler

$\cos(-\alpha) + \sin(\frac{11\pi}{2} + \alpha) + \sin(-\alpha) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ ifadesinde yerine yazıldığında

$\cos\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha \cdot (-\cot\alpha) = \sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$= \cos\alpha = x$ olur.

Trigonometrik Fonksiyonların Açı Değerlerine Göre Sıralanması

1. Verilen açılar birim çemberin hangi bölgesinde olursa olsun bu açıların trigonometrik değeri dar açı cinsinden ifade edilir.

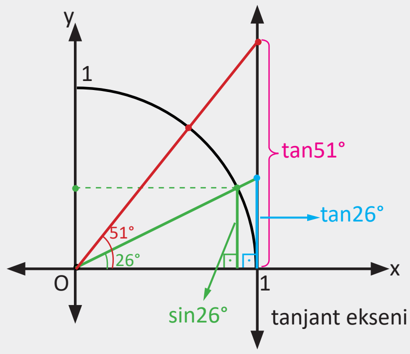
2. Verilen açıların trigonometrik değerleri arasında büyüklük-küçüklük ilişkisinin belirlenebilmesi için trigonometrik değerler dikey eksenlere (sinüs, tanjant) veya yatay eksenlere (kosinüs, kotanjant) taşınır.

53. Örnek

$a = \cos64°$, $b = \tan51°$, $c = \cot64°$ açı değerlerini büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$\cos64° = \sin26°$, $\cot64° = \tan26°$ trigonometrik değerleri birim çember yardımıyla bulunduğundan şekildeki gibi $\tan51° > \tan26° > \sin26°$ olur. Buradan $b > c > a$ olur.



Sonuç

1. bölgedeki açıların büyüklükleri arttıkça sinüs değerleri artar, kosinüs değerleri azalır.
1. bölgedeki bir açının tanjant değeri sinüs değerinden daima büyüktür.

54. Örnek

$x = \cos140°$, $y = \sin165°$, $z = \cot170°$, $t = \tan310°$ değerlerini sıralayınız.

Çözüm

Verilen açılar 1. bölgeye taşınarak açıların trigonometrik değerlerinin sıralaması yapılır.

$x = \cos140° = \cos(90° + 50°) = -\sin50°$

$y = \sin165° = \sin(180° - 15°) = \sin15°$

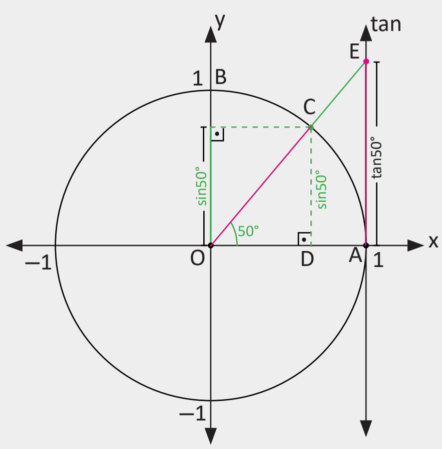
$z = \cot170° = \cot(90° + 80°) = -\tan80°$

$t = \tan310° = \tan(360° - 50°) = -\tan50°$

1. bölgede açıların ölçüleri arttıkça bu açıların tanjant değerleri de artar.

Dolayısıyla $\tan50° < \tan80°$ olur. Buradan $-\tan50° > -\tan80°$ olur.

Yukarıdaki şekilde $\tan50° > \sin50°$ olduğundan $-\tan50° < -\sin50°$ olur.



Sıralama $\sin15° > -\sin50° > -\tan50° > -\tan80°$, $y > x > t > z$ biçiminde yapılır.

Sıra Sizde

$x = \sin275°$, $y = \cos146°$, $z = \tan(-28°)$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Alıştırmalar

1. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ve $3\sin x - 5\cos x = 0$ olduğuna göre $\cos^2 x - \sin^2 x$ değerini bulunuz.

2. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{2\sin x + 5\cos x}{7\sin x + 3\cos x} = 1$ olduğuna göre tanx değerini bulunuz.

3. $\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

4. $(\tan^2 x) \cdot (1 - \sin^2 x)$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

5. Aşağıda verilen trigonometrik değerlerin işaretini belirleyiniz.

a) cos50°   b) sin(−200°)   c) cot300°

6. Aşağıda verilen trigonometrik değerleri küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

a) sin150°   b) cos250°   c) tan30°

7. Tanımlı olduğu aralıkta $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

8. $\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $\tan 40° = x$ olmak üzere

$\dfrac{\tan 140° - \tan 130°}{1 + \tan 140° \cdot \tan 130°}$ ifadesinin x cinsinden değerini bulunuz.

10. Tanımlı olduğu aralıkta

$\dfrac{2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x)}{3\sin(2\pi + x)}$ ifadesinin

değerini bulunuz.

11. $\dfrac{1 + \cot^2 x}{1 + \tan^2 x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

12. $\sin 25° = x$ olmak üzere

$\dfrac{\cos^2 65° + \sin 115° \cdot \cos 205°}{\cot 225°}$ ifadesinin x

cinsinden değerini bulunuz.

13. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$ ve $m(\widehat{C}) = \theta$ olmak üzere $\cos\left(\dfrac{\beta + \theta}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

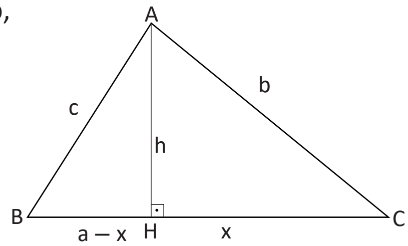
ifadesinin eşitini bulunuz.

14. $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \ldots + \cos^2 89°$ ifadesinin değerini bulunuz.

15. $\dfrac{1}{1 - \sin x} + \dfrac{1}{1 + \sin x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

16. $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ve $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini bulunuz.

1.2.2. Kosinüs Teoremi



Yandaki ABC üçgeninde kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$; iç açı ölçüleri $m(\widehat{A})$, $m(\widehat{B})$, $m(\widehat{C})$ olmak üzere $[AH]\perp[BC]$ olsun.

$|HC| = x$ olduğunda $|BH| = a - x$ olur.

AHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$

$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow \mathbf{h^2 = b^2 - x^2}$ olur. **(1)**

AHB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$

$c^2 = h^2 + (a - x)^2$ olduğuna göre

$\mathbf{h^2 = c^2 - (a - x)^2}$ olur. **(2)**

(1) ve **(2)** denklemleri birlikte çözüldüğünde

$b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2$ elde edilir. Buradan

$b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$

$\mathbf{b^2 = c^2 - a^2 + 2ax}$ olur. **(3)**

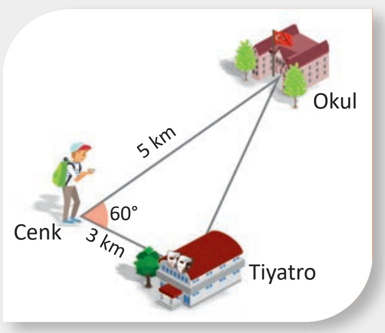
AHC dik üçgeninde $\cos(\widehat{C}) = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos(\widehat{C})$ olur. Bu değer **(3)** denkleminde yerine yazıldığında

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\widehat{C})}$ elde edilir. Benzer şekilde

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A})$

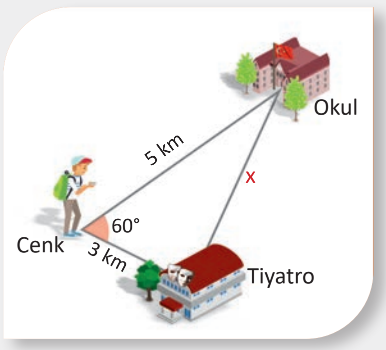
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\widehat{B})$ yazılabilir.

55. Örnek



Kayra, okulda bulunduğu sırada 5 km uzaklıktaki kardeşi Cenk'e akıllı telefonu ile bir konum gönderiyor. Kayra, bir süre sonra Cenk'e 3 km uzaklıktaki tiyatro salonundan bir konum daha gönderiyor.

Cenk, okul ve tiyatronun bulunduğu noktalar bir üçgenin köşeleri olacak şekilde modelleniyor. Cenk'in bulunduğu köşedeki iç açının ölçüsü 60° olduğuna ve Cenk yer değiştirmediğine göre okul ile tiyatro arasındaki mesafenin kaç km olduğunu bulunuz.



Çözüm

Okul ile tiyatro arasındaki mesafe x olsun. Bu durumda Cenk'in bulunduğu köşeye göre kosinüs teoremi uygulandığında

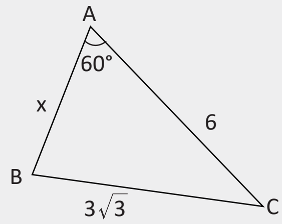
$x^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 19$

$x = \sqrt{19}$ km olur.

56. Örnek



Yandaki ABC üçgeninde $|CB| = 3\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 6$ cm ve $m(\widehat{A}) = 60°$ olduğuna göre $|AB| = x$ uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

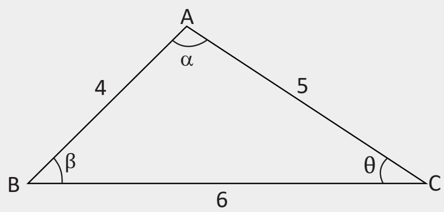
Çözüm

ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulandığında

$(3\sqrt{3})^2 = x^2 + 6^2 - 2\cdot x\cdot 6\cdot \cos 60°$

$27 = x^2 + 36 - 12x\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$ olur. Buradan $x = 3$ cm olur.

57. Örnek



Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm, $|BC| = 6$ cm, $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$, $m(\widehat{C}) = \theta$ olduğuna göre $\cos(\alpha+\beta)$ değerini bulunuz.

Çözüm

ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulandığında

$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot \cos\theta$

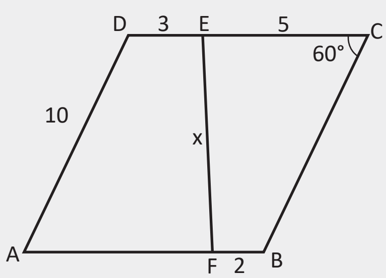
$16 = 25 + 36 - 60\cdot\cos\theta$

$-45 = -60\cdot\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{4}$ olur.

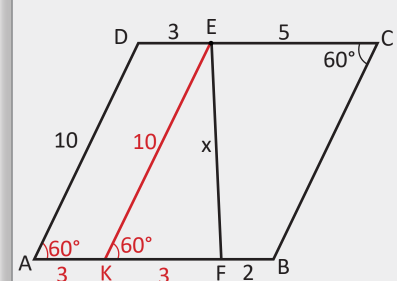
ABC üçgeninde $\alpha + \beta + \theta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 180° - \theta$ olur. Buradan

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta = -\frac{3}{4}$ olur.

58. Örnek



Yandaki ABCD paralelkenarında $|AD| = 10$ birim, $|ED| = 3$ birim, $|EC| = 5$ birim, $|FB| = 2$ birim ve $m(\widehat{C}) = 60°$ olarak veriliyor. $|EF| = x$ uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.



Çözüm

Şekildeki AD kenarına paralel olacak şekilde EK doğru parçası çizilir. $|AD| = |BC| = 10$ birim olduğundan $|EK| = 10$ birim olur. $|DE| = 3$ birim olduğundan $|AK| = |KF| = 3$ birim olur. $m(\widehat{C}) = 60°$ olduğundan $m(\widehat{A}) = m(\widehat{EKF}) = 60°$ olur.

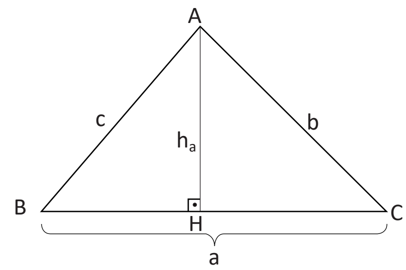
EKF üçgeninde kosinüs teoremi uygulandığında

$|EF|^2 = x^2 = 3^2 + 10^2 - 2\cdot 3\cdot 10\cdot\cos 60°$

$= 9 + 100 - 2\cdot 3\cdot 10\cdot\frac{1}{2}$

$= 109 - 30 = 79 \Rightarrow x = \sqrt{79}$ birim olur.

1.2.3. Sinüs Teoremi



Yandaki ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olsun. $[AH] \perp [BC]$ olduğunda AHB dik üçgeninde $\sin(\widehat{B}) = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \sin(\widehat{B})$ olur.

Buradan $A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\widehat{B})}{2}$ elde edilir.

Benzer şekilde

$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\widehat{C})}{2}$ ve $A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\widehat{A})}{2}$ eşitlikleri yazılır. Bu durumda

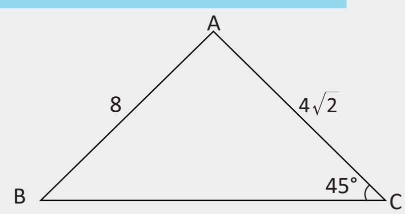
$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\widehat{B})}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\widehat{C})}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\widehat{A})}{2}$ olur.

Bu eşitlikler 2 ile çarpılıp a.b.c çarpımına bölündüğünde

$\frac{a \cdot c \cdot \sin(\widehat{B})}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\widehat{C})}{a \cdot b \cdot c} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\widehat{A})}{a \cdot b \cdot c} \Rightarrow \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$ olur. Buradan

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$ olarak bulunur.

59. Örnek



Şekildeki ABC üçgeninde $|AB| = 8$ birim, $|AC| = 4\sqrt{2}$ birim ve $m(\widehat{C}) = 45°$ olduğuna göre B açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Yukarıdaki ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulandığında $\frac{8}{\sin 45°} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin(\widehat{B})}$ olur. Buradan

$\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin(\widehat{B})} \Rightarrow 8\sin(\widehat{B}) = 4 \Rightarrow \sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}$ olur.

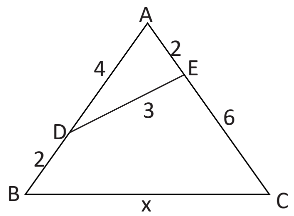
$m(\widehat{B}) = 30°$ veya $m(\widehat{B}) = 150°$ olur.

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

B açısının ölçüsü 150° olamaz. Bu durumda B açısının ölçüsü 30° olur.

Alıştırmalar

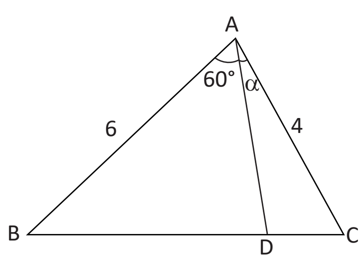
1.



Şekildeki ABC üçgeninde
$|AE| = |BD| = 2$ birim, $|AD| = 4$ birim,
$|ED| = 3$ birim ve $|EC| = 6$ birim olduğuna göre $|BC| = x$ uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

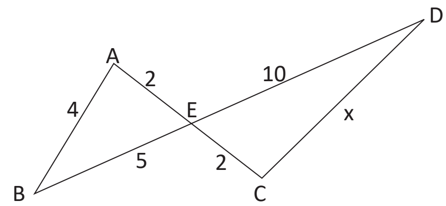
2. Bir ABC üçgeninin kenarları arasında $c^2 - b^2 = a \cdot c - a^2$ bağıntısı olduğuna göre B açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

3.



Şekildeki ABC üçgeninde $|BD| = 4|DC|$, $|AB| = 6$ birim, $|AC| = 4$ birim ve $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ olduğuna göre $\sin\alpha$ nın değerini bulunuz.

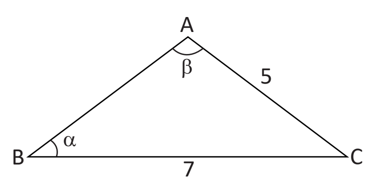
4.



Yukarıdaki şekilde $|AE| = |EC| = 2$ birim, $|ED| = 10$ birim, $|EB| = 5$ birim ve $|AB| = 4$ birim olduğuna göre $|DC| = x$ uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

5. Kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olan bir ABC üçgeninin kenarları arasında $a^2 + c^2 - b^2 = 10 \cdot \cot(\widehat{B})$ bağıntısı ve $a \cdot c = 6$ olduğuna göre $\sin(\widehat{B})$ değerini bulunuz.

6.



Yukarıdaki ABC üçgeninde $|AC| = 5$ birim, $|BC| = 7$ birim, $m(\widehat{A}) = \beta$, $m(\widehat{B}) = \alpha$ ve $\beta - \alpha = 90°$ olduğuna göre $\cot\alpha$ nın değerini bulunuz.

1.2.4. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Belirli zaman aralıklarında aynı hareketin tekrarlandığı durumlar vardır. Bu tür hareketler tanımlanırken "periyodik" ifadesine başvurulur. Dünya'nın Güneş etrafında dönmesi periyodik harekete örnek olarak verilebilir.

Periyot ve Periyodik Fonksiyon

f(x) fonksiyonunun tanım kümesindeki her x elemanı için $f(x) = f(x + T)$ eşitliğini sağlayan $T \in \mathbb{R}^+$ varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, en küçük T sayısına bu **fonksiyonun esas periyodu** denir. **Periyot (T) aynı değerlerin tekrar ettiği en küçük aralıktır.**

60. Örnek

$x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere f(x) = "x in 2 ile bölümünden kalan" şeklinde tanımlanan fonksiyonun periyodunu bulunuz.

Çözüm

x in alabileceği tam sayı değerleri için f(x) görüntü kümesinin tablosu aşağıdaki gibi olacaktır.

x	⋯	−1	0	1	2	3	4	5	⋯
y = f(x)	⋯	1	0	1	0	1	0	1	⋯

Tabloda görüldüğü gibi tam sayıların 2 ile bölümünden kalan 0 ile 1 olduğundan bu değerler belli aralıklarla tekrar etmektedir. O hâlde f(x) fonksiyonu periyodiktir. Tekrar edilen aralığın en küçük genişliği 2 olduğundan f(x) fonksiyonunun periyodu 2 olur.

61. Örnek

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun periyodik olup olmadığını bulunuz.

Çözüm

Tanım gereği $f(x) = f(x + T)$ olmalıdır.
$f(x + T) = 3(x + T) - 2 = 3x + 3T - 2$ olur.
$3x - 2 = 3x + 3T - 2$ eşitliğinden $3T = 0 \Rightarrow T = 0$ olur.

$T \notin \mathbb{R}^+$ olduğundan f(x) fonksiyonu periyodik değildir.

62. Örnek

f(x) fonksiyonunun periyodu T olduğuna göre $f(ax + b) + c$ fonksiyonunun periyodunu T cinsinden bulunuz.

Çözüm

$f(ax + b) + c$ fonksiyonunun periyodu T_1 olsun.
O hâlde $f(ax + b) + c = f(a\cdot(x + T_1) + b) + c = \mathbf{f(a\cdot x + b + a\cdot T_1) + c}$ olur.
f(x) fonksiyonunun periyodu T olduğundan $f(ax + b) + c = \mathbf{f(a\cdot x + b + T) + c}$ olur. Buradan
$f(a\cdot x + b + T) + c = f(a\cdot x + b + a\cdot T_1) + c \Rightarrow \mathbf{T = a\cdot T_1}$ olmalıdır.
Periyot pozitif olduğundan $f(ax + b) + c$ fonksiyonunun periyodu $\mathbf{T_1 = \frac{T}{|a|}}$ olur.

Sıra Sizde

f fonksiyonunun periyodu 2 olduğuna göre $g(x) = f(3x + 5) + 6$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

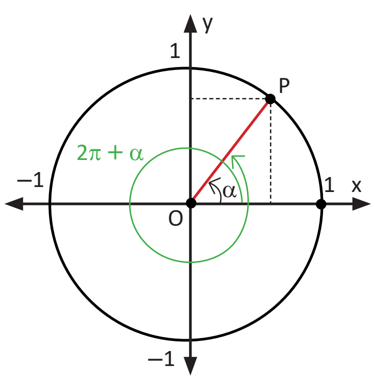
Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Periyotları

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	...
sinx	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0	...

Yukarıdaki tabloda sinüs fonksiyonu için $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ... aralıklarında **0, 1, 0, –1, 0** değerleri tekrar etmektedir.
Benzer şekilde devam edildiğinde $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$ aralıkları için aynı durum tekrarlanır.
Buradan $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 2{\cdot}2\pi) = \cdots = \sin(x + k{\cdot}2\pi)$ olduğu görülür.
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ olduğundan sinüs fonksiyonunun periyodu en küçük $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathbf{T = 2}\pi$ olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	...
cosx	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1	...

Yukarıdaki tabloda kosinüs fonksiyonu için $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ... aralıklarında
1, 0, –1, 0, 1 değerlerinin tekrarlandığı görülmektedir. Buradan
$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2{\cdot}2\pi) = \cdots = \cos(x + k{\cdot}2\pi)$ olduğu görülür.
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ olduğundan kosinüs fonksiyonunun periyodu en küçük $k \in \mathbb{Z}^+$ için $T = \mathbf{2}\pi$ olur.



Yandaki birim çemberde görüldüğü gibi α açısına 2π ve 2π nin katları eklendiğinde sinüs ve kosinüs değerleri değişmez.

$\sin\alpha = \sin(\alpha + \mathbf{2k}\pi)$
$\cos\alpha = \cos(\alpha + \mathbf{2k}\pi)$

63. Örnek

$f(x) = \sin(3x - 1)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$f(x) = f(x + T)$ olduğundan

$\sin(3x - 1) = \sin(3(x + T) - 1) = \sin(3x + 3T - 1)$ olur.

Sinx in periyodu 2π olduğundan

$\sin(3x - 1) = \sin(3x - 1 + 2\pi)$ olur. Buradan

$\sin(3x - 1 + 2\pi) = \sin(3x - 1 + 3T) \Rightarrow 3T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$ olur.

64. Örnek

$g(x) = \cos(4x)$ fonksiyonlarının periyodunu bulunuz.

Çözüm

$\cos(4x) = \cos(4(x + T)) = \cos(4x + 4T)$, $\cos(4x) = \cos(4x + 2\pi)$ olduğundan
$\cos(4x + 2\pi) = \cos(4x + 4T) \Rightarrow 4T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$ olur.

Sonuç

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\sin(ax + b) + c$ ve $\cos(ax + b) + c$ fonksiyonlarının periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$ olur.

Sıra Sizde

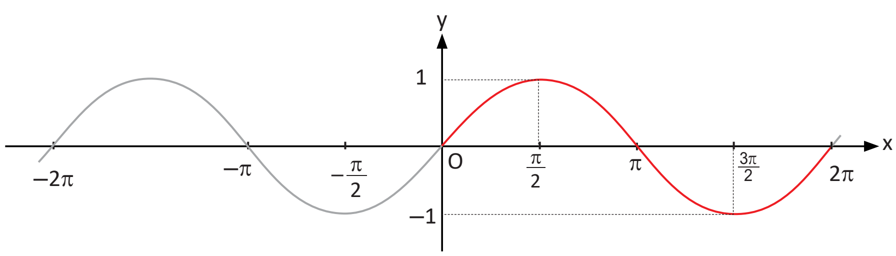
$g(x) = 2 + \cos\left(\frac{3x + 4}{2}\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ olduğundan sinx fonksiyonunun periyodu 2π dir. Bu fonksiyonun grafiği $[0, 2\pi]$ nda çizilir. Grafik ... $[-4\pi, -2\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$ ...aralıklarında tekrar eder. $[0, 2\pi]$ nda birkaç değer seçildiğinde aşağıdaki tablo oluşur.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Tabloda oluşturulan (x, sinx) noktaları analitik düzlemde işaretlenerek ardışık noktalar uygun bir şekilde birleştirildiğinde sinx fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



Yukarıdaki grafiğin orijine göre simetrik olduğu görülmektedir. Orijine göre simetrik fonksiyonlar tek fonksiyondur.

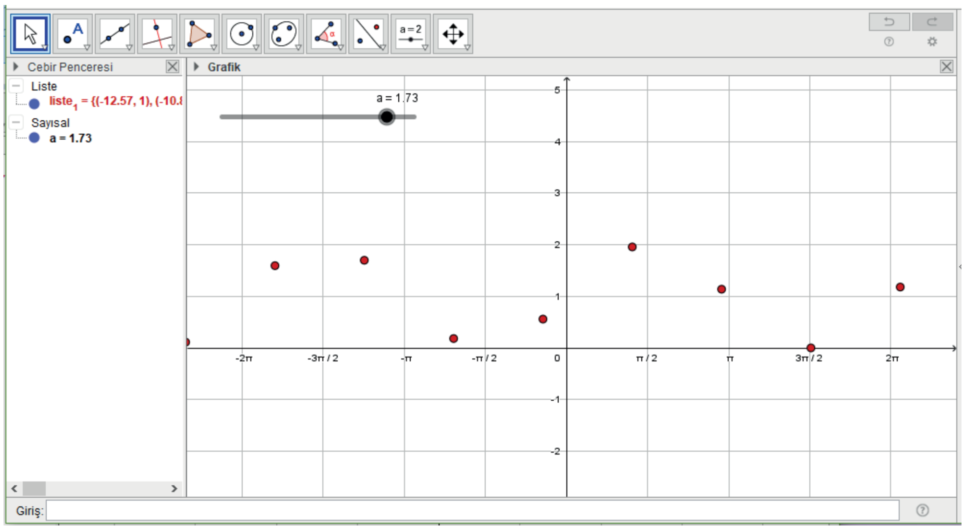
f fonksiyonunun tanım kümesindeki her x değeri için
$f(-x) = -f(x)$ ise f tektir, $f(-x) = f(x)$ ise f çifttir.

Burada tanım gereği $\sin(-x) = -\sin x$ olduğundan sinx fonksiyonu tek fonksiyondur.

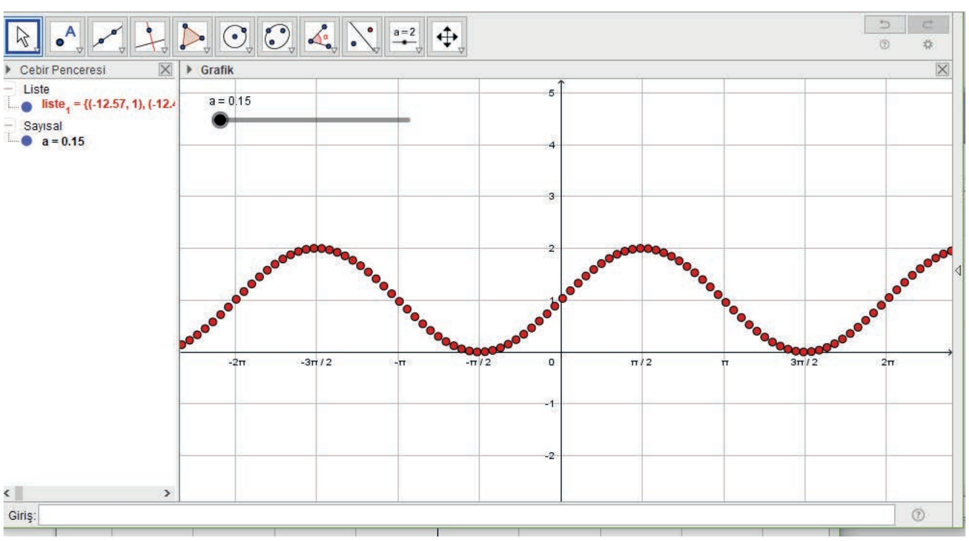
Bu kitaptaki uygulamalarda GeoGebra programı kullanılacaktır.
Uygulamalarda yorum içeren ifadeler renkli verilmiştir.

1. Uygulama: f(x) = sinx + 1 Fonksiyonunun Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, **artış** değerini **0.01** yapınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,sin(i)+1)**, **i**, **−3pi**, **3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Sürgüyü a = 1.73 konumuna getirdiğinizde ekranda birkaç noktadan oluşan sinx + 1 fonksiyonunun grafiği belirmeye başlayacaktır.
Cebir penceresindeki liste1 kümesinde bu noktaların koordinatları görülecektir.
a = 1.73 sayısı ardışık noktaların apsisleri arasındaki mesafeyi gösterir.



Noktalar arasındaki mesafeyi azaltmak için sürgüyü a = 0.15 konumuna getiriniz.
Ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve sinx + 1 fonksiyonunun grafiği ortaya çıkacaktır.

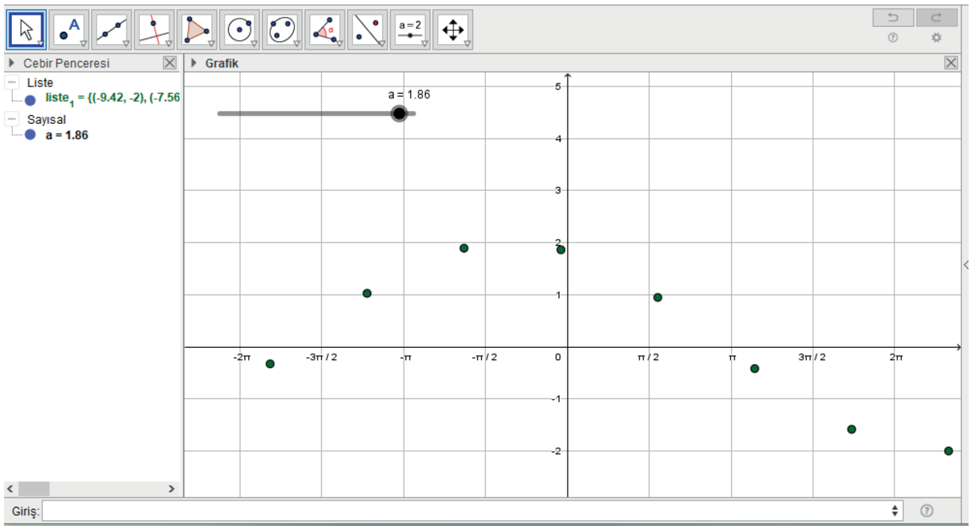


2. Uygulama: $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ Fonksiyonunun Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, artış değerini **0.01** yapınız.

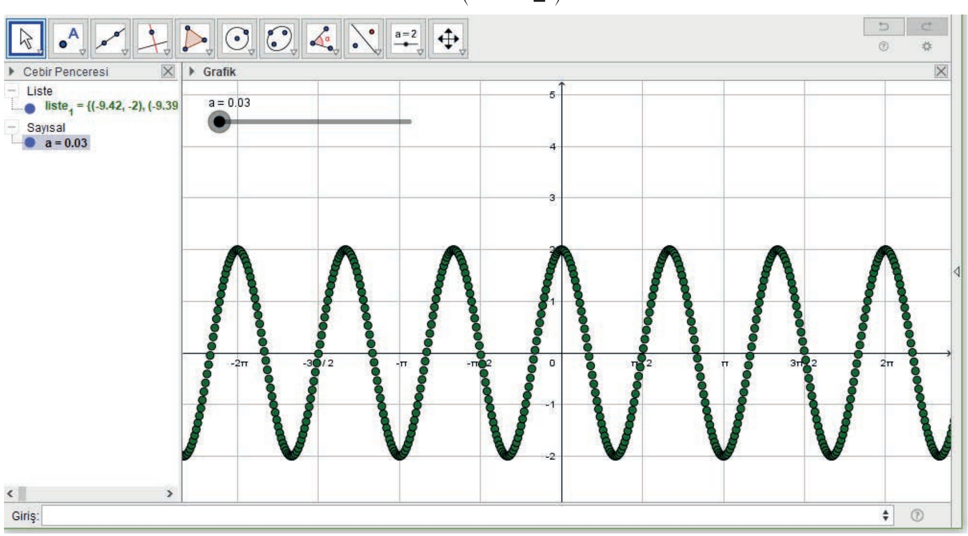
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,2sin(3i+pi/2))**, **i**, **−3pi**, **3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.

Sürgüyü $a = 1.86$ konumuna getirdiğinizde ekranda birkaç noktadan oluşan $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiği belirmeye başlayacaktır.



Sürgüyü $a = 0.03$ konumuna getiriniz.

Ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiği ortaya çıkacaktır.



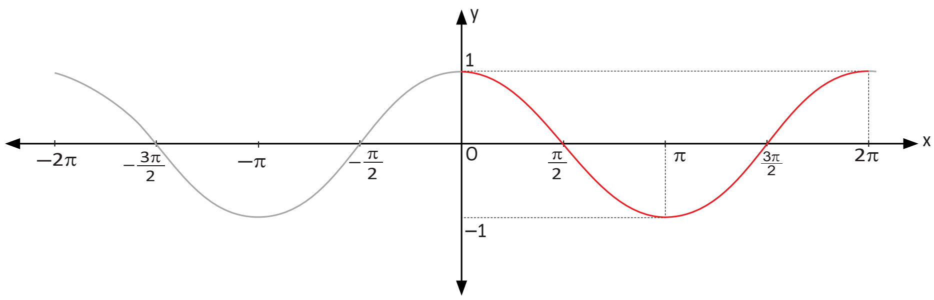
Doğru ve eğriler sonsuz noktaların birleşiminden oluşur. Bu tür grafikleri el ile çizerken yukarıda yapıldığı gibi sonsuz noktalar bir araya getirilemeyeceğinden fonksiyonu sağlayan bazı (x, y) noktaları bulunur. Bu noktalar uygun şekilde ardışık olarak birleştirilir ve grafikler çizilir.

Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$, cos(x + 2kπ) = cosx olduğundan cosx fonksiyonunun periyodu 2π olur. Bu fonksiyonun grafiği [0, 2π] nda çizilir. Grafik ... [−4π, −2π], [−2π, 0], [0, 2π], [2π, 4π] ... aralıklarında tekrar eder. [0, 2π] nda birkaç değer seçildiğinde aşağıdaki tablo oluşur.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1

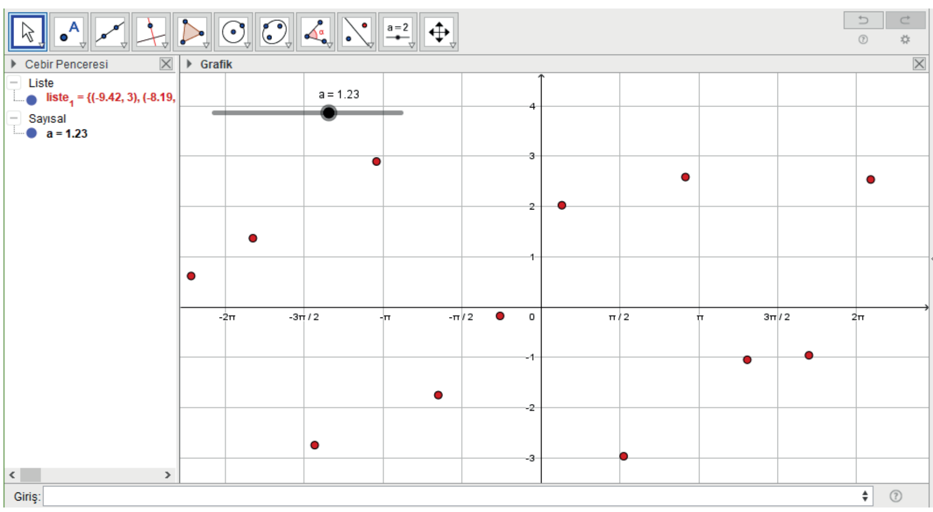
Tabloda oluşturulan (x, cosx) noktaları analitik düzlemde işaretlenerek ardışık noktalar uygun bir şekilde birleştirildiğinde cosx fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



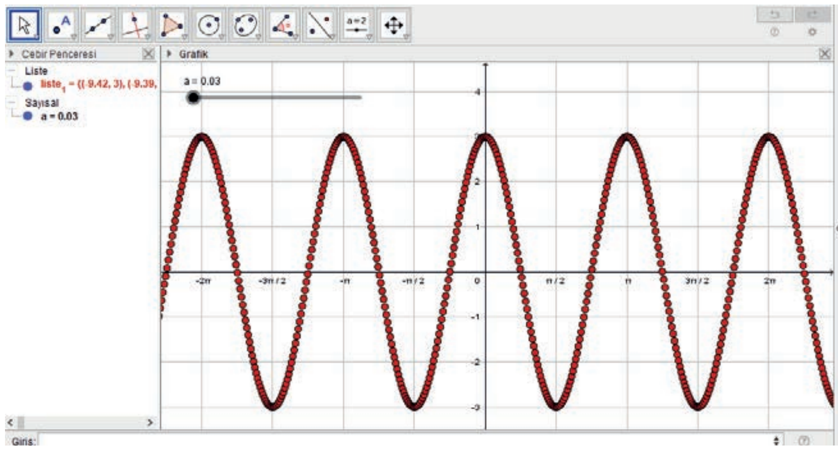
Yukarıdaki grafiğin y eksenine göre simetrik olduğu görülmektedir.
Kosinüs fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan kosinüs fonksiyonu **çift fonksiyon**dur. Dolayısıyla cos(−x) = cosx olur.

3. Uygulama: f(x) = 3cos(2x) Fonksiyonunun Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, **artış** değerini **0.01** yapınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,3cos(2i))**, **i**, **−3pi**, **3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Sürgüyü a = 1.23 konumuna getirdiğinizde ekranda birkaç noktadan oluşan 3cos(2x) fonksiyonunun grafiği belirmeye başlayacaktır.
Cebir penceresinde liste1 kümesinde bu noktaların koordinatları görülecektir.

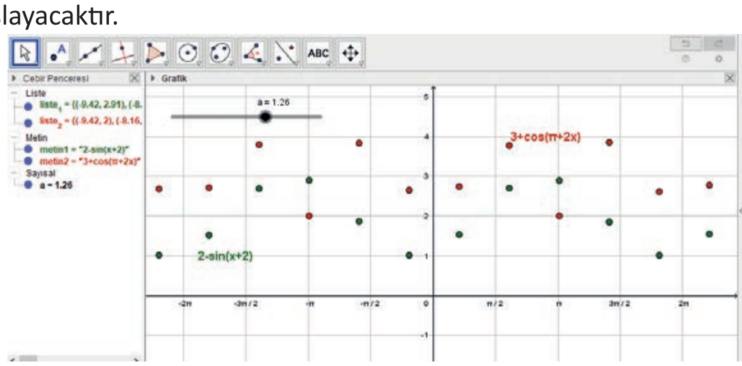


Sürgüyü a = 0.03 konumuna getiriniz.
Bu durumda ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve 3cos(2x) fonksiyonunun grafiği ortaya çıkacaktır.

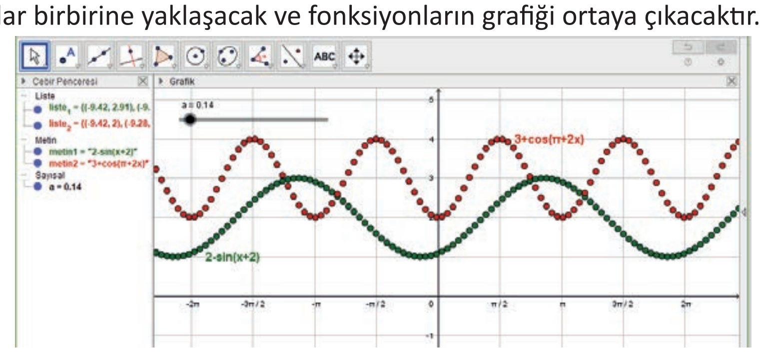


4. Uygulama: f(x) = 2 − sin(x + 2) ve g(x) = 3 + cos(π + 2x) Fonksiyonlarının Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, **artış** değerini **0.01** yapınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,2−sin(i+2))**, **i**, **−3pi**, **3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,3+cos(π+2i))**, **i**, **−3pi**, **3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Sürgüyü a = 1.26 konumuna getirdiğinizde noktalardan oluşan fonksiyonların grafiği belirmeye başlayacaktır.



Sürgüyü a = 0.03 konumuna getiriniz.
Ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve fonksiyonların grafiği ortaya çıkacaktır.



Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonlarının Periyotları

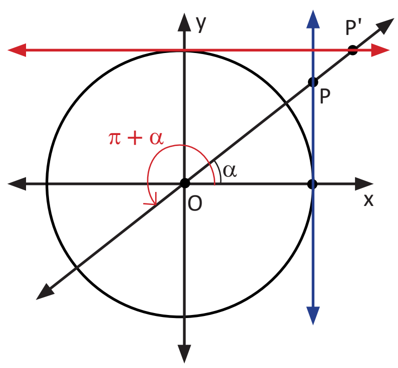
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	...
tanx	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	...

Yukarıdaki tabloda tanjant fonksiyonu için $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ... aralıklarında **0**, **tanımsız**, **0** şeklinde tekrar eden sonuçlar elde edilir. Buradan
$\tan x = \tan(x+\pi) = \tan(x+2\pi) = \cdots = \tan(x+k\pi)$ olduğu görülür.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\tan(x+k\pi) = \tan x$ olduğundan tanjant fonksiyonunun periyodu en küçük $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathbf{T} = \pi$ olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	...
cotx	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	0	Tanımsız	...

Yukarıdaki tabloda kotanjant fonksiyonu için $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ... aralıklarında **tanımsız**, **0**, **tanımsız** şeklinde tekrar eden sonuçlar elde edilir. Buradan
$\cot x = \cot(x+\pi) = \cot(x+2\pi) = \cdots = \cot(x+k\pi)$ olur.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\cot(x+k\pi) = \cot x$ olduğundan kotanjant fonksiyonunun periyodu en küçük $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathbf{T} = \pi$ olur.

Yandaki birim çemberde görüldüğü gibi α açısına π ve π nin katları eklendiğinde tanjant ve kotanjant değerleri değişmez.
$\tan\alpha = \tan(\alpha + k\pi)$
$\cot\alpha = \cot(\alpha + k\pi)$



Sonuç

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan(ax+b)+c$ ve $\cot(ax+b)+c$ fonksiyonlarının periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ olur.

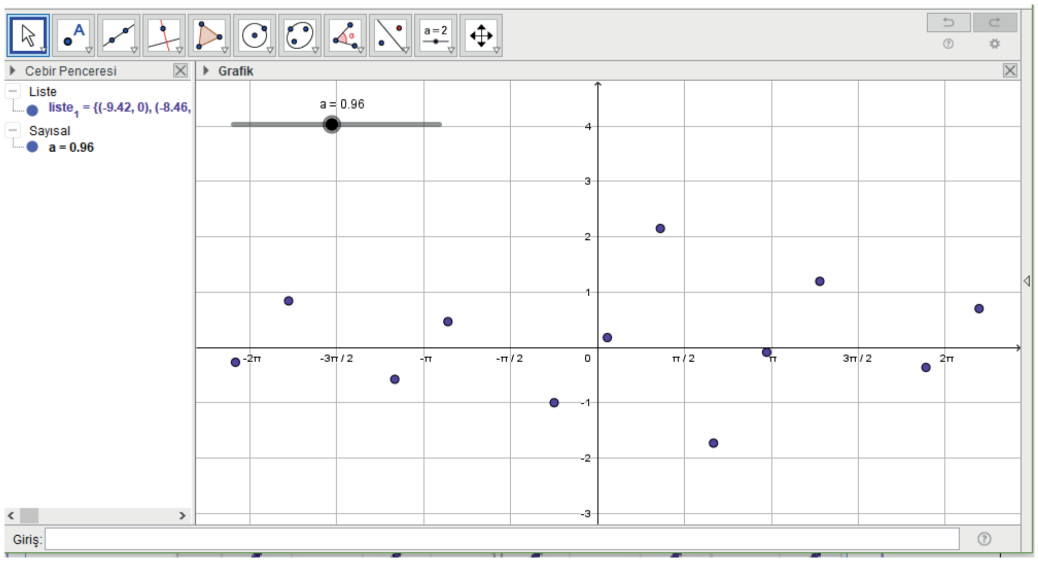
Sıra Sizde

Aşağıda verilen fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

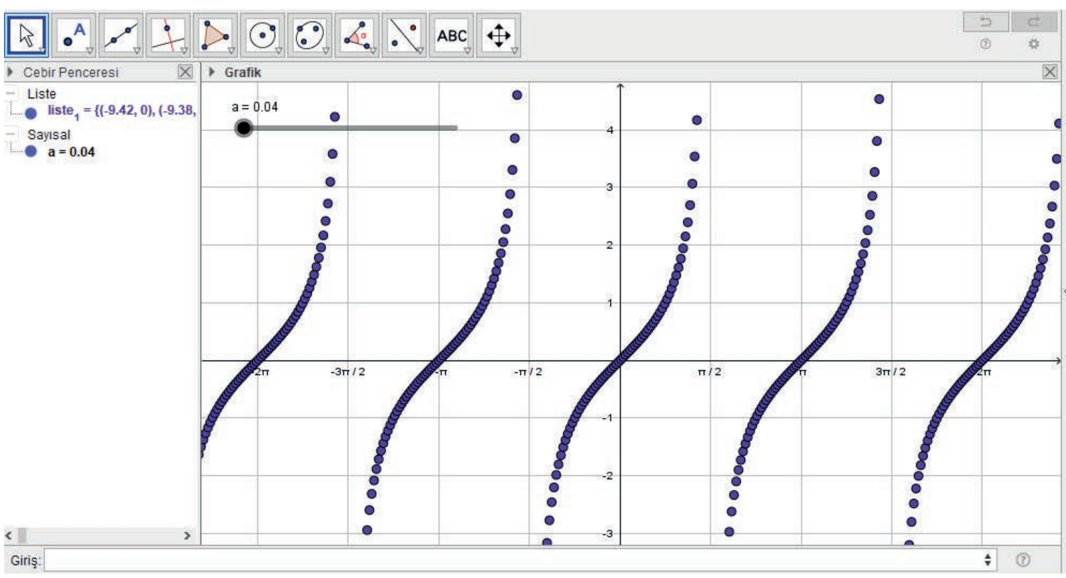
a) $f(x) = \tan(-2x+3)$ b) $g(x) = 3\cot(1-3x)+4$

5. Uygulama: f(x) = tanx Fonksiyonunun Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, **artış** değerini **0.01** yapınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,tan(i))**, **i**, **–3pi**, **3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Sürgüyü a = 0.96 konumuna getirdiğinizde noktalardan oluşan fonksiyonun grafiği belirmeye başlayacaktır.



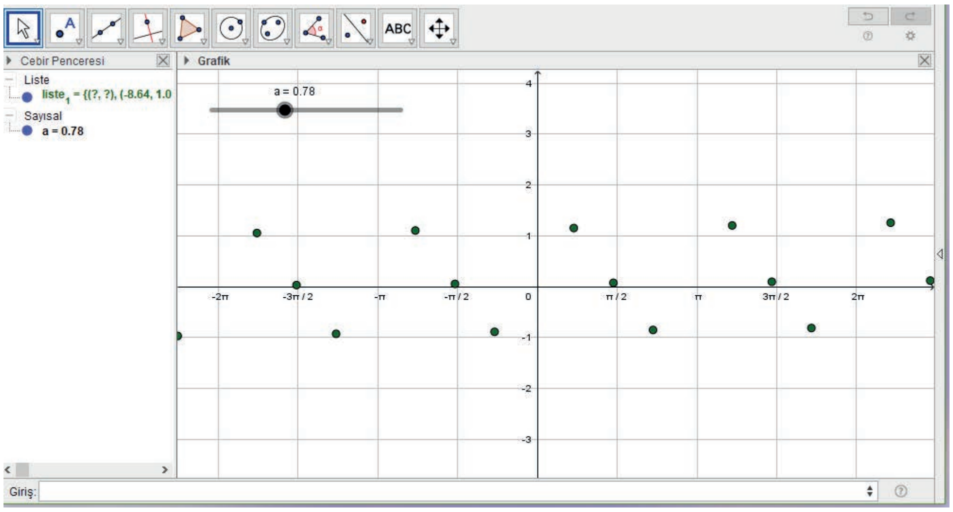
Sürgüyü a = 0.04 konumuna getiriniz.
Ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve tanx fonksiyonunun grafiği ortaya çıkacaktır.



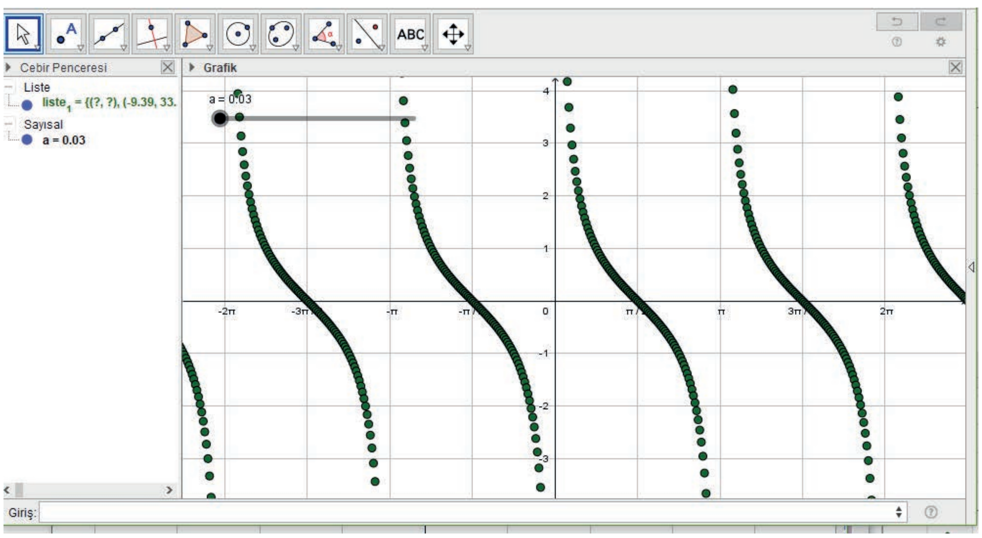
Grafikte tanx fonksiyonunun $(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ açı ölçüleri için tanımsız olduğuna dikkat ediniz.
tanx fonksiyonu orijine göre simetrik olduğundan **tek fonksiyon**dur.
tanx fonksiyonunun periyodu π dir. Bu periyoda karşılık gelen aralık $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dır.

6. Uygulama: f(x) = cotx Fonksiyonunun Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, **artış** değerini **0.01** yapınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,cot(i))**, **i**, **–3pi**, **3pi, a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Sürgüyü a = 0.78 konumuna getirdiğinizde ekranda birkaç noktadan oluşan cotx fonksiyonunun grafiği belirmeye başlayacaktır.



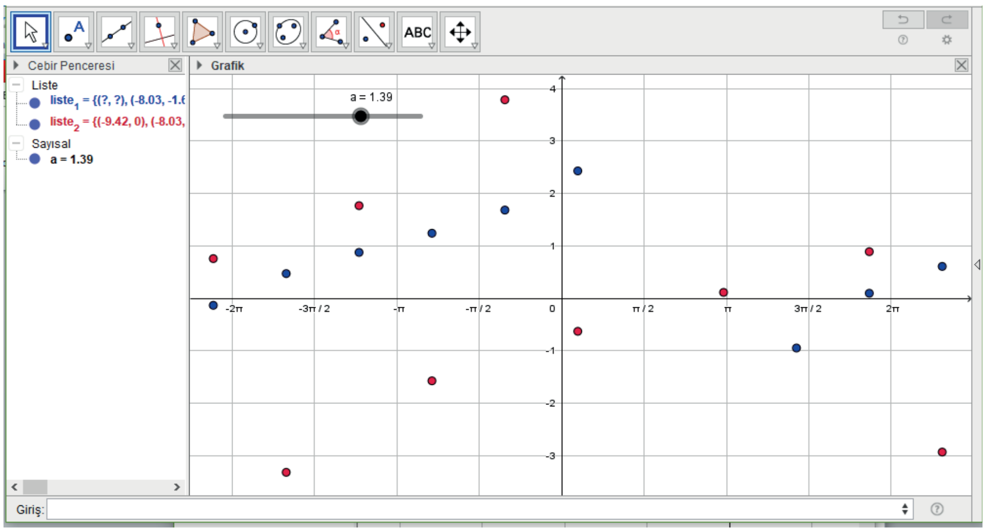
Sürgüyü a = 0.03 konumuna getiriniz.
Ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve cotx fonksiyonunun grafiği ortaya çıkacaktır.



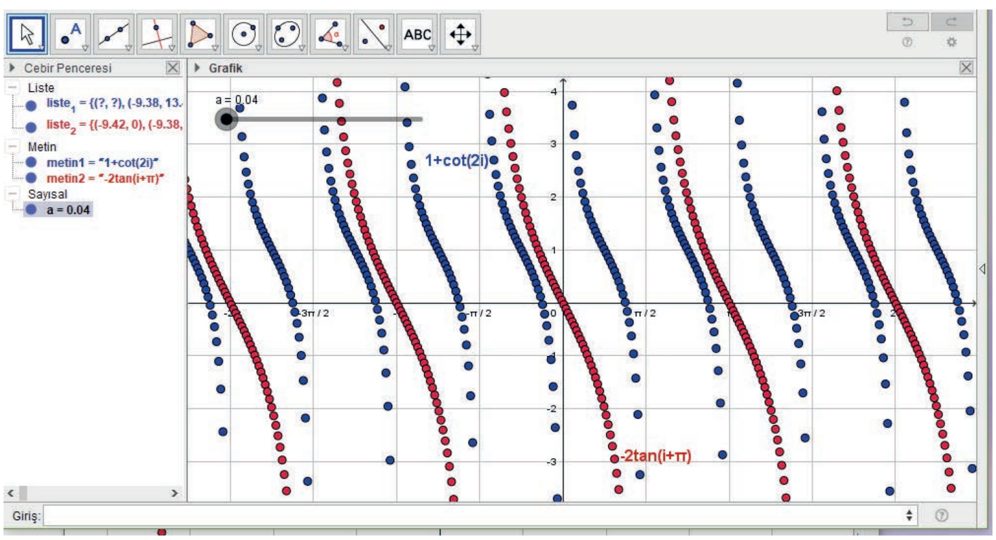
Grafikte k·π (k ∈ $\mathbb{Z}$) açı ölçüleri için cotx fonksiyonunun tanımsız olduğuna dikkat ediniz.
cotx fonksiyonu orijine göre simetrik olduğundan **tek fonksiyon**dur.
cotx fonksiyonunun periyodu π dir. Bu periyoda karşılık gelen aralık (0,π) dır.

7. Uygulama: $f(x) = 1 + c\,ot(2x)$ ve $g(x) = -2\tan(x + \pi)$ Fonksiyonlarının Grafiği

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **0.01**, **maksimum** değerini **2**, **artış** değerini **0.01** yapınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,1+cot(2i))**, **i**, **–3pi, 3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Girişe dizi yazınız. Açılan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i,–2tan(i+pi))**, **i**, **–3pi, 3pi**, **a** yazınız. Enter tuşuna basınız.
Sürgüyü $a = 1.39$ konumuna getirdiğinizde noktalardan oluşan $1 + \cot(2x)$ ve $-2\tan(x + \pi)$ fonksiyonlarının grafiği belirmeye başlayacaktır.

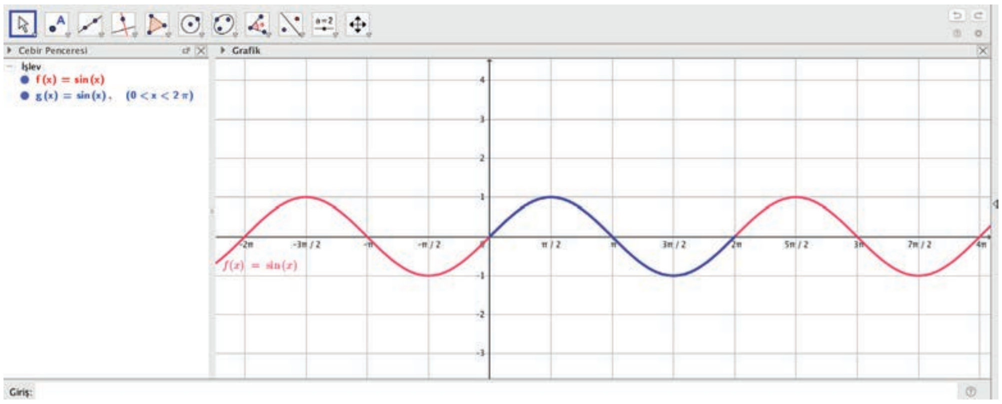


Sürgüyü $a = 0.04$ konumuna getiriniz.
Ardışık noktalar birbirine yaklaşacak ve fonksiyonların grafiği ortaya çıkacaktır.

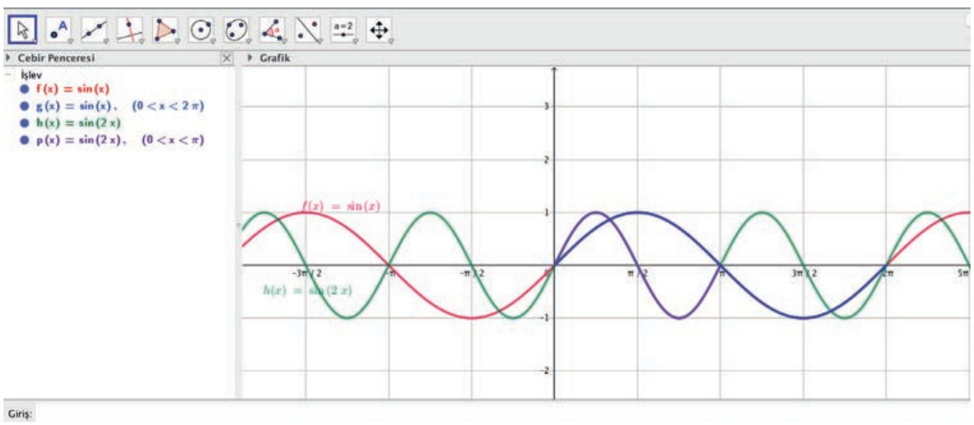


8. Uygulama: y = a·sin(bx + c) + k Fonksiyonlarının Grafiği

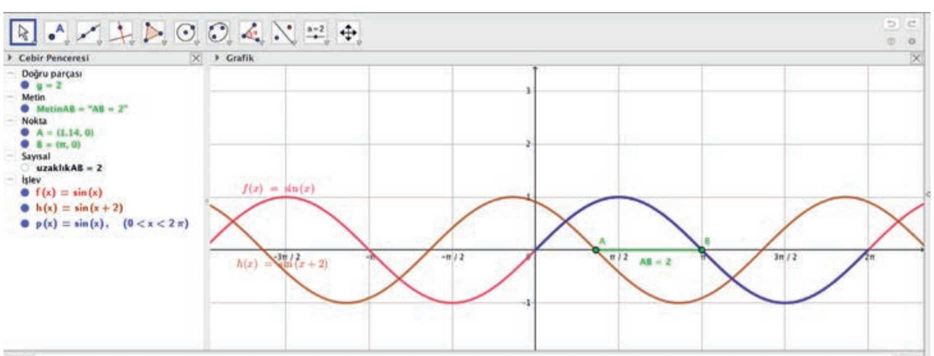
a = 1, b = 1, c = 0, k = 0 olmak üzere y = sinx in grafiğini çizmek için **Girişe** **sinx** yazarak Enter tuşuna basınız. Grafikte sinx in periyodu farklı renkte gösterilmiştir.



a = 1, b = 2, c = 0, k = 0 için y = sin2x grafiğini oluşturunuz.



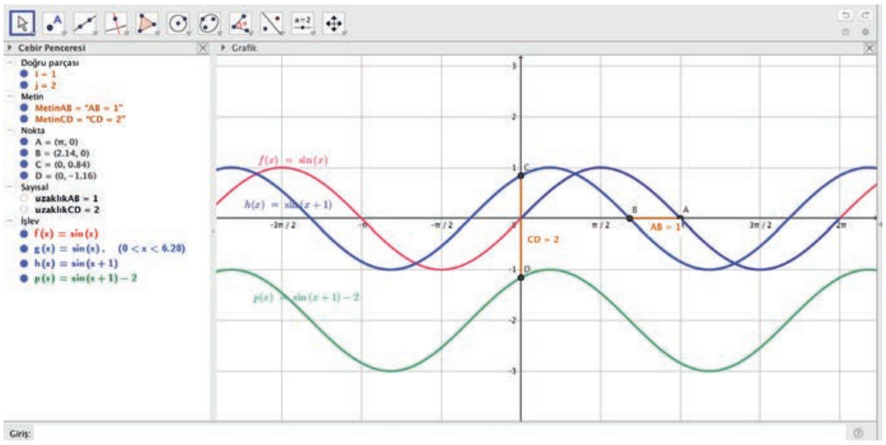
sin2x fonksiyonunun periyodunun $\frac{2\pi}{2} = \pi$ olduğu görülür.
Periyodun fonksiyondaki x in katsayısına bağlı olduğuna, sinx e göre sin2x dalgalarının daraldığına dikkat ediniz.
a = 1, b = 1, c = 2, k = 0 için y = sin(x + 2) grafiğini oluşturunuz.



|BA| = 2 birim olduğundan grafikte sinx fonksiyonunun 2 birim sola ötelendiği görülür.

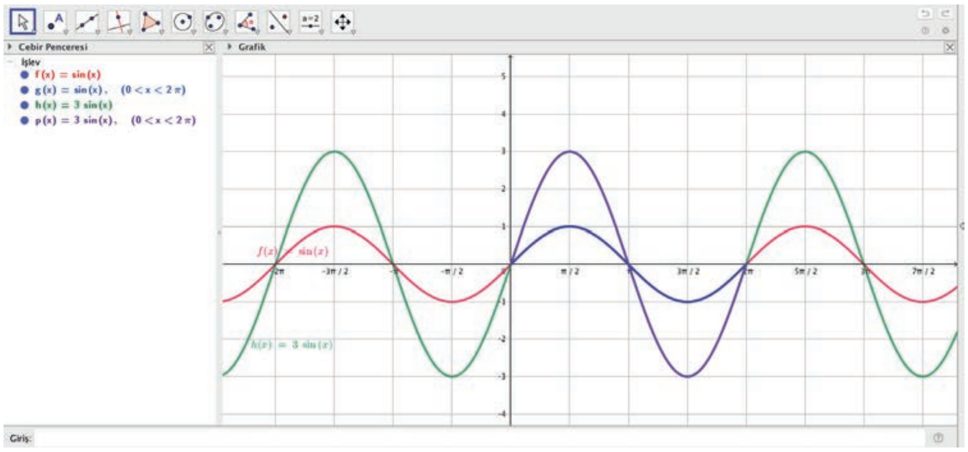
y = a·sin(bx + c) fonksiyonunun grafiğinde c > 0 olduğunda sinbx grafiği $\frac{c}{b}$ birim sola, c < 0 olduğunda sinbx grafiği $\frac{|c|}{b}$ birim sağa ötelenir.

y = sin(x + 1) – 2 fonksiyonunun grafiğini oluşturunuz.



Girişe y=sin(x+1) yazınız. Enter tuşuna basarak grafiği oluşturunuz. Grafik, sinx grafiğine göre 1 birim sola ötelenir.
Girişe sin(x+1)–2 yazarak grafiği oluşturunuz.
Grafik, sin(x + 1) fonksiyonunun grafiğine göre 2 birim aşağı ötelenir.
y = a·sin(bx + c) + k fonksiyonunda k > 0 olduğunda grafik k birim yukarı, k < 0 olduğunda grafik |k| birim aşağı ötelenir.

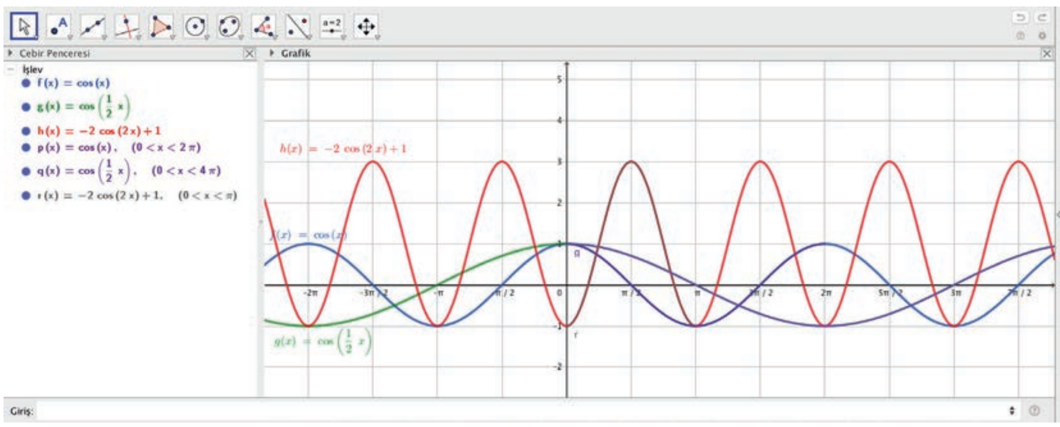
Girişe sinx ve **3sinx** yazarak fonksiyonların grafiklerini ayrı ayrı oluşturunuz.



y = sinx grafiğinde tepe noktasının grafiğin ortasından geçen yatay doğruya uzaklığı 1 birimdir. y = 3sinx grafiğinde tepe noktasının grafiğin ortasından geçen yatay doğruya uzaklığı 3 birimdir.
y = a·sin(bx + c) fonksiyonunun grafiğinde tepe noktasının grafiğin ortasından geçen yatay doğruya uzaklığı |a| birimdir.
|a|değeri arttıkça dalganın yüksekliği artmakta, |a| değeri azaldıkça dalganın yüksekliği azalmaktadır.

9. Uygulama: $y = a \cdot \cos(bx + c) + k$ Fonksiyonlarının Grafiği

Girişe cosx yazıp Enter tuşuna basarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.
Girişe cos(1/2x) yazıp Enter tuşuna basarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.
Girişe –2cos(2x)+1 yazıp Enter tuşuna basarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.



Sıra Sizde

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini GeoGebra programında çizerek grafiği cosx fonksiyonunun grafiğine göre yorumlayınız.

a) $y = 2\cos(3x - \pi)$

b) $y = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

c) $y = 3 + \frac{1}{2}\cos(2x + \pi)$

Sıra Sizde

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini GeoGebra programında çizerek grafiği sinx fonksiyonunun grafiğine göre yorumlayınız.

a) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 3$

b) $y = \frac{1}{4}\sin(4x - 1)$

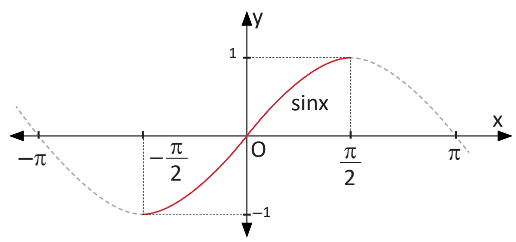
1.2.5. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

f: A → B tanımlı bir f fonksiyonun tersinin fonksiyon olabilmesi için bu fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir.
sinx, cosx ve tanx fonksiyonlarının grafikleri yatay doğru testine tabi tutulduğunda bu fonksiyonların bire bir olmadıkları görülür. Dolayısıyla mevcut tanım kümelerinde bu fonksiyonların ters fonksiyonları yoktur.
Bu fonksiyonların tanım kümelerinin bire bir ve örten olan alt kümelerinden biri tanım kümesi olarak seçildiğinde fonksiyonların bu kümede ters fonksiyonları vardır.

1. f(x) = sinx Fonksiyonunun Tersi

sinx fonksiyonunun tanım kümesi $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olarak alındığında bu aralıkta fonksiyon bire bir ve örten olur.

Şekilde verilen sinx grafiğinde görüldüğü gibi fonksiyon $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ nda bire bir ve örtendir.



sinx fonksiyonu $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, f(x) = sinx olarak tanımlandığında

$f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x)$ = arcsinx fonksiyonuna **sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

y = arcsinx ⇔ x = siny olur.

65. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) arcsin0 b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

Çözüm

arcsin(y) = x fonksiyonunun görüntü kümesi $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olmalıdır.

a) $\arcsin 0 = x \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Sıra Sizde

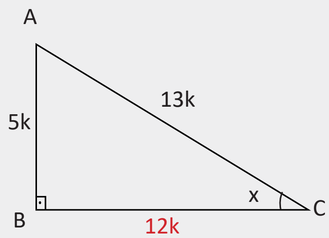
Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) arcsin1 b) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

66. Örnek

$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm



$\arcsin\frac{5}{13} = x$ olsun. Bu durumda $\sin x = \frac{5}{13}$ olur.

Buna göre yandaki ABC dik üçgeni çizildiğinde

$|AB| = 5k$, $|AC| = 13k$ olur. Pisagor teoreminden

$|BC| = 12k$ olur. Buradan

$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) = \cos x = \frac{12}{13}$ olur.

67. Örnek

$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = t \Rightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan

$t = -\frac{\pi}{3}$ ve $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ olur.

Not

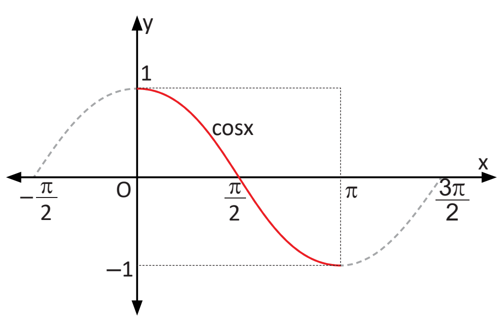
$\sin(\arcsin x) = x, \ x \in [-1,1]$

$\arcsin(\sin y) = y, \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2. g(x) = cosx Fonksiyonunun Tersi

cosx fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \pi]$ olarak alındığında bu aralıkta fonksiyon bire bir ve örtendir.

Şekilde verilen cosx grafiğinde görüldüğü gibi fonksiyon $[0, \pi]$ nda bire bir ve örtendir.



cosx fonksiyonu $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$ olarak tanımlandığında
$g^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$, $g^{-1}(x) = \arccos x$ fonksiyonuna **cosx fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ olur.

68. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\arccos\frac{1}{2}$

Çözüm

a) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi]$ olur.

b) $\arccos\frac{1}{2} = x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0,\pi]$ olur.

Not

$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1, 1]$
$\arccos(\cos y) = y,\ y \in [0, \pi]$

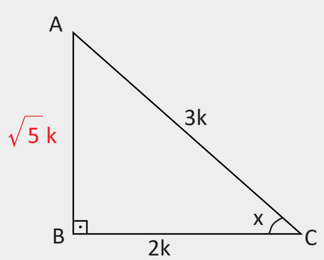
Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) arccos0 b) arccos1 c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

69. Örnek

$\tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

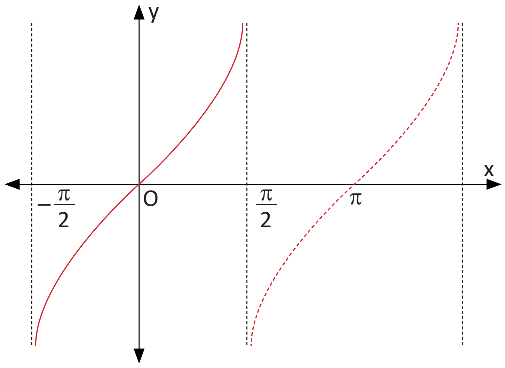
$\arccos\frac{2}{3} = x$ olsun. Bu durumda $\cos x = \frac{2}{3}$ olur.

ABC dik üçgeni çizildiğinde $|BC| = 2k$ ve $|AC| = 3k$ olur.
Pisagor teoreminden $|AB| = \sqrt{5}k$ olur. Buradan

$\tan\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \tan x = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ olur.

3. h(x) = tanx Fonksiyonunun Tersi

tanx fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bire bir ve örtendir.



Yanda verilen tanx grafiğinde görüldüğü gibi fonksiyon $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bire bir ve örtendir.

Bu aralıkta tanx fonksiyonunun ters fonksiyonu vardır.

tanx fonksiyonu h: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, h(x) = tanx olarak tanımlandığında

$h^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $h^{-1}(x) = \arctan x$ fonksiyonuna **tanx fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

y = arctanx ⇔ x = tany olur.

70. Örnek

$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm

$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\arctan 1 = t \Rightarrow \tan t = 1,\ t = \frac{\pi}{4}$ olur. $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ olur.

Not

$\tan(\arctan x) = x,\ x \in \mathbb{R}$

$\arctan(\tan y) = y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

71. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\arctan 1$ b) $\arctan(-\sqrt{3})$ c) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$

Çözüm

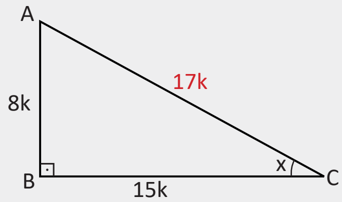
a) $\arctan 1 = x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\arctan(-\sqrt{3}) = x \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

c) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = x \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

72. Örnek

$\sin\left(\arctan\left(-\frac{8}{15}\right)\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$\arctan a = b$ ifadesinde $a < 0 \Rightarrow b \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ olur.

$\arctan\left(-\frac{8}{15}\right)$ negatif yönlü bir açıdır. Buna göre

$\arctan\left(-\frac{8}{15}\right) = -x$ olsun. Buradan

$\tan(-x) = -\frac{8}{15} \Rightarrow \tan x = \frac{8}{15}$ olur.

Yukarıdaki gibi bu oranda bir dik üçgen çizildiğinde Pisagor teoreminden $|AC| = 17k$ olur.

$\sin\left(\arctan\left(-\frac{8}{15}\right)\right) = \sin(-x) = -\sin x = -\frac{8}{17}$ olur.

73. Örnek

$\arcsin\frac{x}{2} = \arccos x$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

Çözüm

$\left.\begin{array}{l} \arcsin\frac{x}{2} = y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \mathbf{\sin y = \frac{x}{2}} \\ \arccos x = y,\ y \in [0, \pi] \\ \mathbf{\cos y = x} \text{ olur.} \end{array}\right\}$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olur.

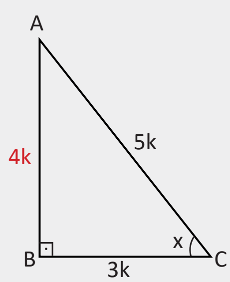
$y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x \geq 0$ olur. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ olduğundan

$\frac{x^2}{4} + x^2 = 1 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = 1 \Rightarrow 5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ veya $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ olur.

$x \geq 0$ olduğundan $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ olur.

74. Örnek

$\tan\left(\arccos\frac{3}{5} + \frac{3\pi}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.



Çözüm

$\arccos\frac{3}{5} = x \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$ olacak şekilde yandaki dik üçgen çizildiğinde $|BC| = 3k$ ve $|BC| = 5k$ olmak üzere Pisagor teoreminden $|AB| = 4k$ olur. Buradan

$\tan\left(\arccos\frac{3}{5} + \frac{3\pi}{2}\right) = \tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$= -\cot x = -\frac{|BC|}{|AB|} = -\frac{3k}{4k} = -\frac{3}{4}$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\cos\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ b) $\tan\left(\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2}\right)$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

1. $\sin^2x + \cos^2x =$ .... olur.

2. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\cos x = \frac{1}{3}$ olduğunda $\tan x =$ .... olur.

3. Ölçüsü $\frac{5\pi}{8}$ radyan olan açının bütünleri olan açı .... radyandır.

4. $y = \cos(3x + 2)$ fonksiyonunun periyodu .... olur.

5. arccosx fonksiyonunun değer kümesi .... aralığındadır.

6. x ekseni ile pozitif yönde α derecelik açı yapan ışının birim çemberi kestiği noktanın apsisi

   .... ile gösterilir.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

7. $\sin 60°$ (   )

8. $\cos(2\pi - \alpha)$ (   )

9. arcsin1 (   )

10. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ (   )

11. cos(arcsinx) (   )

12. $(1 - \sin x)\cdot(1 + \sin x)$ (   )

a) $-\cot\alpha$

b) $\cos^2x$

c) $\frac{5\pi}{2}$

ç) $\cos\alpha$

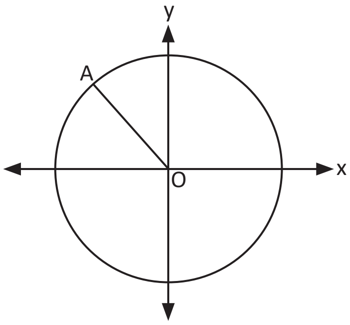
d) $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

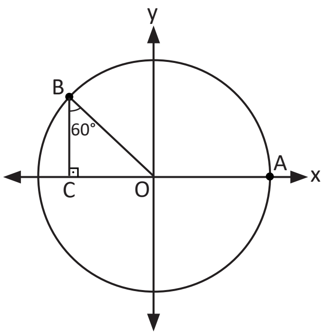
f) $\sqrt{1 - x^2}$

C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

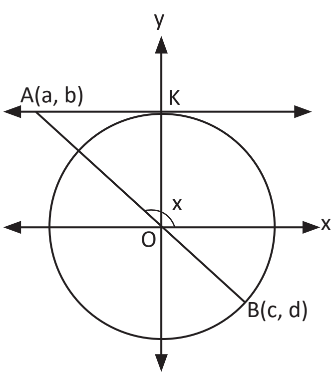
13. Şekildeki birim çember üzerinde verilen A noktasının apsisi $-\frac{2}{3}$ olduğuna göre bu noktanın ordinatını bulunuz.



14. Yandaki O merkezli birim çemberde $m(\widehat{CBO}) = 60°$ olduğuna göre $\tan(\widehat{AOB})$ değerini bulunuz.

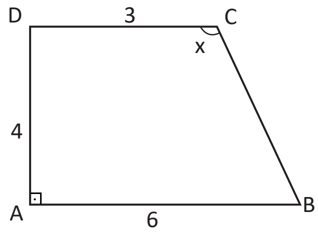


15. Şekildeki O merkezli birim çemberde AK doğrusu K noktasında çembere teğettir. A, O ve B noktaları doğrusal olduğuna göre $\frac{c-d}{a-b}$ işleminin sonucunu x cinsinden bulunuz.



16. $\cos(2x-1) + 2a = 7$ eşitliğini sağlayan a tam sayılarının toplamını bulunuz.

17.



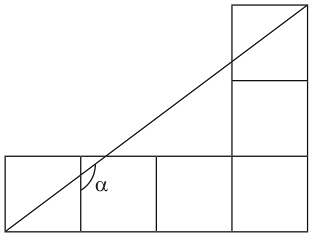
Yukarıdaki şekilde ABCD dik yamuk, $[AD]\perp[AB]$, $[AB]//[DC]$, $|AD| = 4$ birim, $|DC| = 3$ birim ve $|AB| = 6$ birim olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

18. $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12}$ ifadesinin değerini bulunuz.

19. Ölçüsü $-\frac{73\pi}{8}$ radyan olan açının esas ölçüsünün kaç radyan olduğunu bulunuz.

20. $\sin 330° + \cos 510°$ işleminin sonucunu bulunuz.

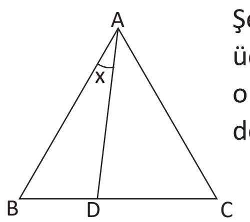
21.



Yukarıdaki şekil birbirine eş altı kareden oluşmaktadır. Buna göre $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

22. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

23.



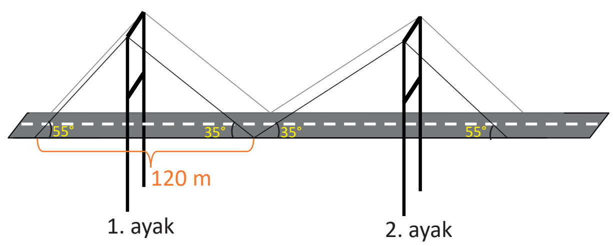
Şekilde ABC eşkenar üçgen, $2|DC| = 3|BD|$ olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

24. $\arctan(2\sin(\arccos x)) = \frac{\pi}{3}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

25. $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ve $\tan x = -3$ olduğuna göre $\sin(\pi + x)\cdot\cos(2\pi - x)$ çarpımının sonucunu bulunuz.

26. $\dfrac{1-\tan 4095°}{\cos(-660°)\cdot\sin 600°}$ ifadesinin değerini bulunuz.

27.



Bir köprünün çelik halatlarını yenileyecek bir mühendis bu işlem için aşağıdaki ölçümleri yapmıştır.

- Köprünün birinci ayağının sol tarafındaki halat, köprü ile 55° lik, sağ tarafındaki halat 35° lik açı oluşturmaktadır.
- Köprünün ikinci ayağının sol tarafındaki halat, köprü ile 35° lik, sağ tarafındaki halat 55°lik açı oluşturmaktadır.
- Halatların köprüye tutunduğu ardışık iki nokta arasındaki uzaklık 120 metredir.

Buna göre yenileme işlemi için kaç metre çelik halatın kullanılacağını bulunuz.
($\sin 55° = 0{,}8$ ve $\sin 35° = 0{,}6$ alınız.)

28.



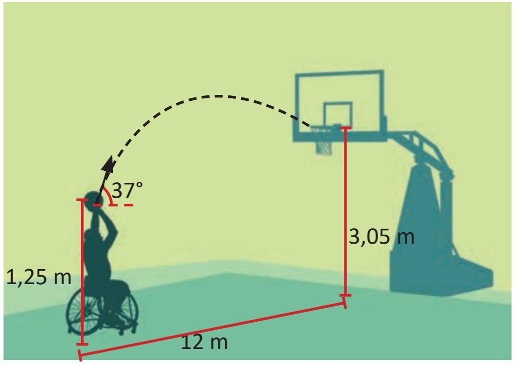
Bir lunaparkta bulunan dönme dolabın kabin sayısı 12, yarıçap uzunluğu 18 metredir.
Ahmet Bey ve çocukları, dönme dolabın yerden 3 metre yüksekteki kabinine biniyor.
a) Dönme dolap saat yönünün tersinde 240° döndüğünde Ahmet Bey ve çocuklarının içinde bulunduğu kabinin yerden yüksekliğinin kaç metre olacağını bulunuz.
b) Dönme dolabın saat yönünde 300° döndüğü varsayıldığında Ahmet Bey ve çocuklarının içinde bulunduğu kabinin yerden yüksekliğinin kaç metre olacağını bulunuz.

29.



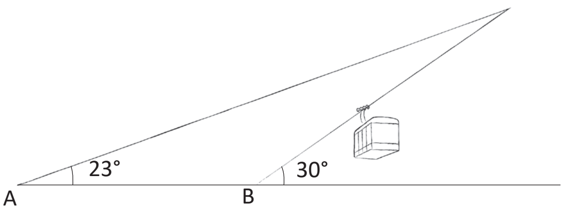
İstanbul'da bulunan Ayasofya Camisi ile Trabzon'da bulunan Ayasofya Camisi'nin enlem (E) ve boylam (B) bilgileri şekilde verilmiştir.
Bu iki yapının
a) Enlemleri arasındaki farkı,
b) Boylamları arasındaki farkı derece, dakika, saniye cinsinden bulunuz.

30.



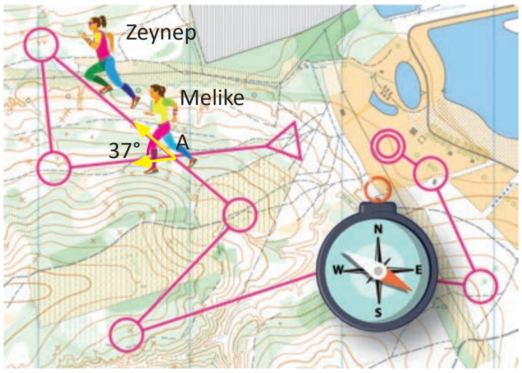
V_0 hızıyla atılan ve yatayda yaptığı açı α olan bir cismin düşeyde aldığı yol $h = V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, yatayda aldığı yol $x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$ formülü ile hesaplanır [t: Harekete başladıktan sonra cismin havada kaldığı süre (sn.)].
Yukarıdaki görselde bir tekerlekli sandalye basketbolcusu, topu 1,25 metre yükseklikten yatayda 37° lik açı ile potaya atıyor. Potanın yüksekliği 3,05 metre olduğuna göre topun çemberden geçebilmesi için elden çıkış hızının kaç m/sn. olması gerektiğini bulunuz.
($g = 10$ m/sn^2, $\sin 37° = 0,6$ ve $\cos 37° = 0,8$ alınız.)

31.



Bir mühendis, teleferik tesisi için çizdiği projede teleferiğin başlangıç noktasını A, çelik halatın yatayda yaptığı açıyı 23° olarak alıyor. Öte yandan Anıtlar Yüksek Kurulu, kültürel mirasın tahrip olabileceği gerekçesiyle mühendisten projeyi değiştirmesini istiyor. Bunun üzerine projeyi değiştiren mühendis, A noktasını şekildeki gibi 60 metre sağa kaydırıp çelik halatın yatayda yaptığı açıyı bu defa 30° olarak alıyor. Mühendisin yaptığı değişikliğin ardından teleferiğin izleyeceği yolun kaç metre kısaldığını bulunuz.
($\sin 7° = 0,12$ ve $\sin 23° = 0,39$ alınız.)

32.



Oryantiring (yönbul), her türlü arazide harita ve pusula yardımı ile katılımcıların denetim noktalarını bulmaya çalıştığı bir doğa sporudur. Yukarıda Zeynep ve Melike'nin bir arazide oryantiring yaparken kullandıkları harita verilmiştir. Zeynep A noktasını $V_1 = 120$ m/dk. hız ile geçiyor. Bir dakika sonra aynı noktayı Melike $V_2 = 100$ m/dk. hız ve 37° lik bir sapma ile geçiyor. Buna göre Melike'nin A noktasını geçtiği andan 4 dakika sonra iki sporcu arasında oluşacak mesafenin kaç metre olacağını bulunuz. (cos37°= 0,8 alınız.)

33.

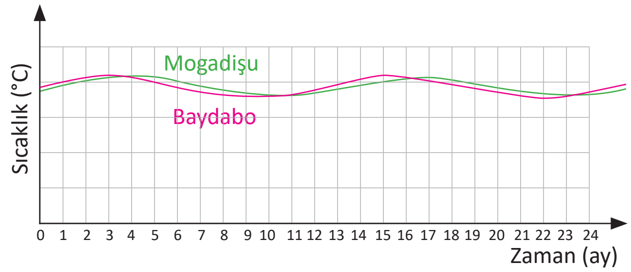


İdeal tansiyonun (kan basıncı) üst değeri 120 mmHg (milimetre cıva), alt değeri 80 mmHg olarak kabul edilir. Bu değerler $f(t) = 100 + 20\cdot\sin 2\pi t$ biçiminde hesaplanır. t, geçen süre (sn.) olmak üzere

a) $t = 0$, $t = 0{,}25$, $t = 0{,}5$, $t = 0{,}75$ ve $t = 1$ için tansiyon değerlerini bularak $t \in [0, 1]$ nda tansiyon grafiğini oluşturunuz.

b) Oluşturduğunuz grafiği yorumlayarak hangi t değerleri için tansiyonun maksimum ve minimum olduğunu bulunuz.

34.



Somali'nin başkenti Mogadişu ve oraya yakın bir şehir olan Baydabo'da tedaviye muhtaç çocuklar için hastanelerde gönüllü olarak görev yapacak bir doktor, bu ülkeye ilk kez gidecektir. Görev yapacağı şehirlerin sıcaklık değerlerini merak eden doktor, araştırması sonucunda bu değerleri gösteren yukarıdaki grafiğe ulaşıyor ve sıcaklık değerlerinin tekrarlayan bir davranış sergilediğini fark ediyor.

Mogadişu şehrinin sıcaklığı

$y = 28 + (1{,}8)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot(t-1)\right)$

Baydabo şehrinin sıcaklığı

$y = 28 + (2{,}4)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot t\right)$ ile ifade edildiğine göre

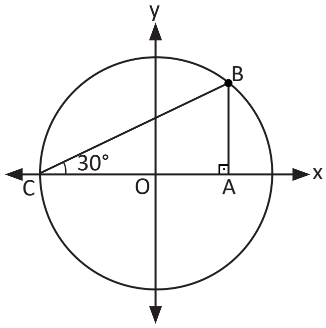
a) İki şehrin 15. aydaki sıcaklık farkını bulunuz.

b) İki şehrin en yüksek sıcaklığa hangi aylarda ulaştığını bulunuz.

($\sqrt{3} = 1{,}7$ alınız.)

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

35. Şekildeki O merkezli birim çemberde [AB]⊥[AC] ve $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olduğuna göre B noktasının koordinatları toplamı kaçtır?



A) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ B) $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

D) $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

36. $a = \sin 170°$, $b = \cos 230°$, $c = \tan 100°$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) c < a < b B) a < c < b
C) b < a < c D) c < b < a
E) b < c < a

37. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ve $\sin x = \frac{2}{5}$ olduğuna göre $5 \cdot \cos x - \tan x$ ifadesinin değeri kaçtır?

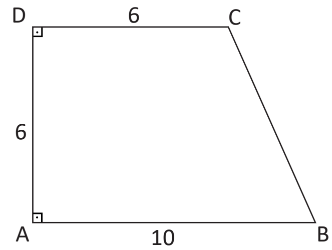
A) $-\frac{19}{\sqrt{21}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{21}}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\sqrt{21}$

38. $\frac{\sin x - 2\cos x}{\cos x + 2\sin x} = \frac{1}{3}$ olduğuna göre cotx değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{7}$

39.



Yukarıdaki şekilde ABCD dik yamuk, [AB]⊥[AC], [AB]//[DC] |AB|= 10 birim, |DC| = |AD| = 6 birim olduğuna göre $\sin(\widehat{C})$ kaçtır?

A) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

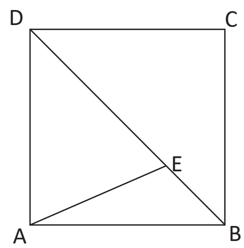
D) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{13}}$

40. Tanımlı olduğu aralıkta $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) cosx C) sinx

D) 1 − sinx E) −1

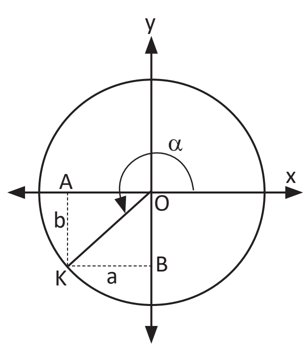
41.



Yandaki şekilde ABCD kare, [DB] köşegen, |DE| = 3|EB| olduğuna göre $\tan(\widehat{DEA})$ kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) 2

42. Şekildeki birim çemberde |KB| = a birim ve |AK| = b birim olduğuna göre sinα + cosα aşağıdakilerden hangisine eşittir?



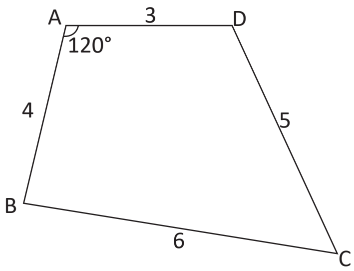
A) a + b B) a − b C) −a − b

D) −a + b E) a·b

43. $\dfrac{4\cos^2 x - 3\sin^2 x + 10}{5\sin^2 x + 11\cos^2 x + 1}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $-\frac{3}{2}$

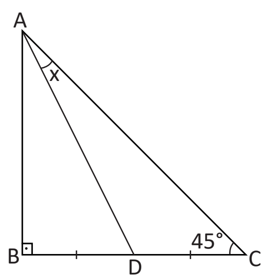
44.



Yukarıdaki şekilde ABCD dörtgen, $m(\widehat{A}) = 120°$, $|AB| = 4$ birim, $|AD| = 3$ birim, $|CD| = 5$ birim, $|BC| = 6$ birim olduğuna göre $\cos(\widehat{C})$ kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

45.



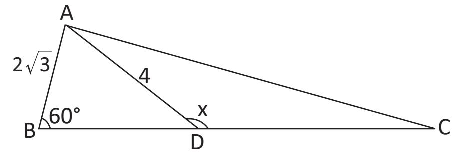
Şekilde ABC dik üçgen, $[AB] \perp [AC]$, $m(\widehat{C}) = 45°$, $|BD| = |DC|$ ve $m(\widehat{DAC}) = x$ olduğuna göre cotx değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 3

46. $\sin^2 1 - \sin^2 2 + \sin^2 3 - ... + \sin^2 89$ ifadesinin sonucu kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $-\frac{1}{2}$

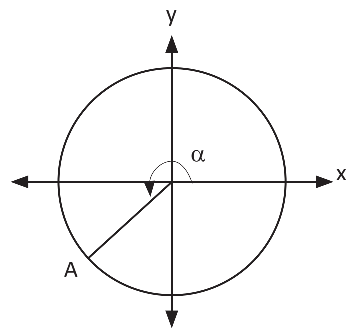
47.



Yukarıdaki ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 60°$, $|AD| = 4$ birim, $|AB| = 2\sqrt{3}$ birim ve $m(\widehat{CDA}) = x$ olduğuna göre sinx değeri kaçtır?

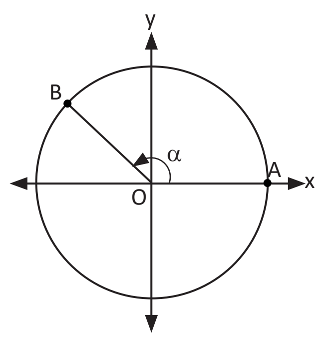
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

48. Yandaki birim çemberde gösterilen α açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisi olabilir?



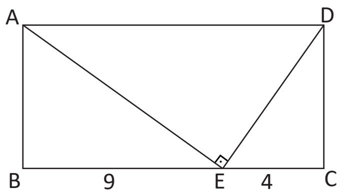
A) 80° B) 150° C) 275° D) 190° E) 340°

49. Şekildeki O merkezli birim çemberde $m(\widehat{AOB}) = \alpha$, B noktasının x eksenine göre simetriği C, y eksenine göre simetriği D, orijine göre simetriği E olarak verilmiştir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?



A) C noktasının apsisi $\cos\alpha$ olur.
B) C noktasının ordinatı $-\sin\alpha$ olur.
C) D noktasının apsisi $-\cos\alpha$ olur.
D) E noktasının ordinatı $\sin\alpha$ olur.
E) D noktasının ordinatı $\sin\alpha$ olur.

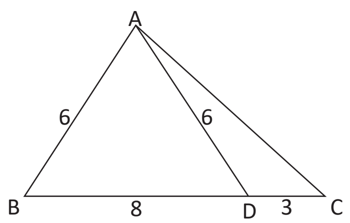
50.



Şekilde ABCD dikdörtgen, $[AE] \perp [ED]$, $|BE| = 9$ birim ve $|EC| = 4$ birim olduğuna göre $\cos(\widehat{EDA})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ D) $\frac{5}{\sqrt{13}}$ E) $\frac{6}{\sqrt{13}}$

51.



Şekildeki ABC üçgeninde $|AB| = |AD| = 6$ birim, $|DC| = 3$ birim ve $|BD| = 8$ birim olduğuna göre $\tan(\widehat{C})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{7}$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

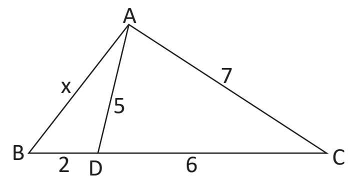
52. $\sin\left(\arctan\frac{5}{2}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{5}{\sqrt{29}}$ B) $\frac{4}{\sqrt{29}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{29}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{29}}$

53. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesinde x in alabileceği tam sayılar toplamı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

54.

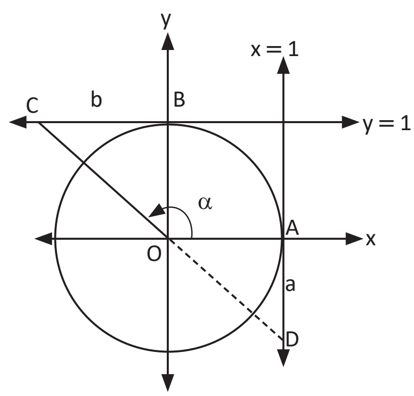


Şekildeki ABC üçgeninde $|AC| = 7$ birim, $|AD| = 5$ birim, $|DC| = 6$ birim, $|BD| = 2$ birim olduğuna göre $|AB| = x$ kaç birimdir?

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{33}$

D) $\sqrt{37}$ E) $\sqrt{41}$

55.

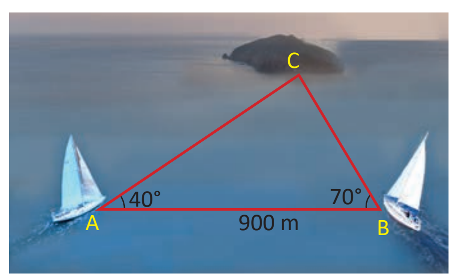


Yukarıdaki birim çemberde $|AD| = a$ birim, $|BC| = b$ birim ve $m(\widehat{AOC}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan\alpha + \cot\alpha$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $a + b$ B) $-a + b$ C) $a \cdot b$

D) $-b + a$ E) $-a - b$

56.



Aralarındaki mesafe 900 m olan iki yelkenli, aynı adaya ulaşmak için A ve B noktalarından doğrusal hareket ediyor. Yapılan modellemede $m(\widehat{BAC}) = 40°$ ve $m(\widehat{CBA}) = 70°$ olduğuna göre B noktasından hareket eden yelkenlinin adaya ulaşmak için katedeceği mesafe kaç metredir? ($\sin 40° = 0{,}6$ ve $\sin 70° = 0{,}9$ alınız.)

A) 500 B) 600 C) 650

D) 700 E) 750

GEOMETRİ

2. ANALİTİK GEOMETRİ

2.1. Doğrunun Analitik İncelenmesi

Bu bölümde

- Analitik düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı veren bağıntıyı elde ederek problemler çözmeyi,
- Bir doğru parçasını belirli bir oranda bölen noktanın koordinatlarını hesaplamayı,
- Analitik düzlemde doğruları inceleyerek işlemler yapmayı,
- Bir noktanın bir doğruya uzaklığını hesaplamayı

öğreneceksiniz.



KAVRAMLAR

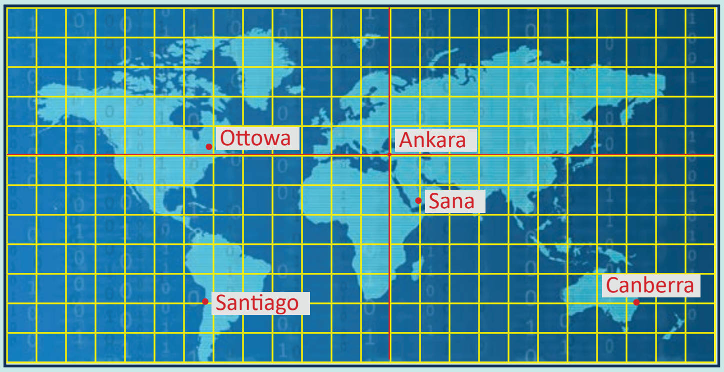
Analitik Düzlem, Eğim Açısı, İki Nokta Arasındaki Uzaklık, İki Doğrunun Paralelliği, Doğrunun Eğimi, İki Doğrunun Dikliği

HAZIRLIK ÇALIŞMASI



Sinema salonundaki koltuklardan hangisinde oturulacağı satın alınan biletin üzerindeki bilgiler yardımıyla tespit edilir.

Biletin üzerinde yer alan konum bilgileri nasıl düzenlenmiş olabilir?



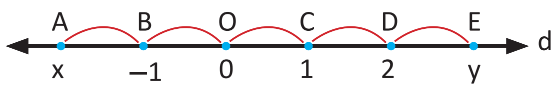
Başkentlerin konumlarını Ankara'yı merkez alarak tespit etmek isteyen bir öğrenci haritayı birimkarelere ayırıyor.

Öğrenci, başkentlerin konumlarını nasıl ifade edebilir?

2.1. Doğrunun Analitik İncelenmesi

Koordinat (Sayı) Doğrusu

Her noktası bir reel sayıya karşılık gelen doğruya **koordinat (sayı) doğrusu** denir. Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz tane reel sayı vardır.

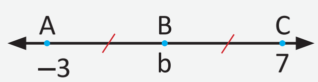


Bir A noktası x reel sayısı ile eşleştirildiğinde A noktasının koordinatı x olur ve koordinatı x olan A noktası A(x) şeklinde yazılır.
Koordinat doğrusunda iki nokta arasındaki uzaklık bu iki noktanın koordinatları farkının mutlak değerine eşittir.
A(x) ve E(y) noktaları arasındaki uzaklık $|AE| = |y - x| = |x - y|$ olur. Örneğin koordinat doğrusunda A(–2) ve E(3) noktaları arasındaki uzaklık
$|AE| = |3 - (-2)| = 5$ birimdir.

1. Örnek

Koordinat doğrusunda A(–3), B(b) ve C(7) noktaları verilsin. $|AB| = |BC|$ olduğuna göre b reel sayısını bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde $|AB| = |BC|$ olduğuna göre

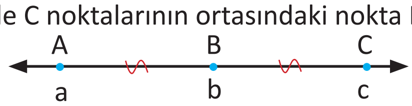
$b - (-3) = 7 - b \Rightarrow b + 3 = 7 - b$

$\Rightarrow b + b = 7 - 3$

$\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$ olur.

Koordinat Doğrusunda Orta Noktanın Koordinatı

Koordinat doğrusunda A ile C noktalarının ortasındaki nokta B olsun.



$$c - b = b - a$$

$$2b = a + c$$

B noktasının koordinatı $b = \frac{a+c}{2}$ olur.

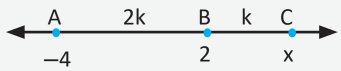
Sıra Sizde

Koordinat doğrusunda A(–7) ile B(21) noktalarının orta noktası C(x) olduğuna göre x reel sayısını bulunuz.

2. Örnek

Koordinat doğrusunda A(–4), B(2) ve C(x) noktaları veriliyor. |AB| = 2|BC| ve x > 0 olduğuna göre x reel sayısını bulunuz.

Çözüm



$|AB| = 2|BC| = 2k \Rightarrow |BC| = k$ olur.
$|AB| = 2 - (-4) = 6 = 2k \Rightarrow k = 3$ birim olur.
O hâlde $x = 2 + k = 2 + 3 = 5$ olur.

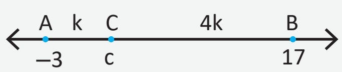
Sıra Sizde

Koordinat doğrusunda A(–1), B(x) ve C(15) noktaları veriliyor. |AB| = 3|BC| ve $-1 < x < 15$ olduğuna göre x reel sayısını bulunuz.

3. Örnek

Koordinat doğrusunda A(–3) ve B(17) noktaları veriliyor. A ile B arasında olan ve $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{4}$ koşulunu sağlayan C noktasının koordinatını bulunuz.

Çözüm

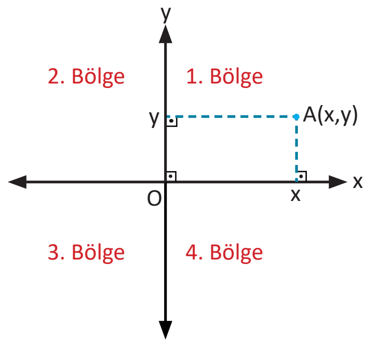


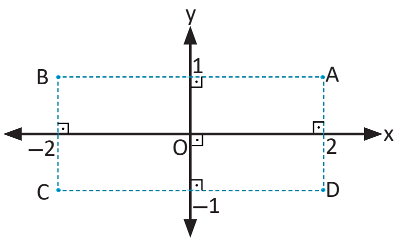
Şekilde $|AC| = k$ olduğunda
$|CB| = 4k$ ve $|AB| = 5k$ olur.
$k + 4k = 5k = 17 - (-3)$
$5k = 20 \Rightarrow k = 4$ olur.
$c = (-3) + k \Rightarrow c = (-3) + 4 = 1$ olur.

Sıra Sizde

Reel sayı doğrusu üzerinde A(–4), B(20) noktaları ve [AB] nı $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ oranında bölen bir C(c) noktası veriliyor. A ve C noktalarının orta noktası D(d), C ve B noktalarının orta noktası E(e) olduğuna göre DE uzunluğunu bulunuz.

Analitik Düzlem
Bir düzlemde başlangıç noktaları aynı olan ve dik kesişen iki koordinat doğrusunun oluşturduğu sisteme **koordinat sistemi** denir.
Yatay eksen x ile, düşey eksen y ile gösterilir.
O noktası koordinat eksenlerinin kesim noktasıdır ve bu noktaya **başlangıç noktası** veya **orijin** denir.
Üzerinde dik koordinat sistemi tanımlanmış düzleme **analitik düzlem** denir. Koordinat sistemi analitik düzlemi 4 bölgeye ayırır. Eksenler bölgelere dâhil değildir.
Yandaki şekilde koordinatları (x, y) olan A noktası gösterilmiştir. A(x, y) ifadesindeki x, A noktasının **apsisi**; y, A noktasının **ordinatı**dır.





Yandaki şekilde A(2, 1), B(–2, 1), C(–2, –1) ve D(2, –1) noktaları analitik düzlemde birleştirildiğinde ABCD dikdörtgenini oluşturur. Bu dikdörtgenin köşeleri 4 ayrı bölgede olduğu için koordinatların işaretleri bölgelere göre değişim gösterir.

Hatırlatma

A(x, y) noktası
1. bölgede ise $x > 0, y > 0$ (+, +) olur.
2. bölgede ise $x < 0, y > 0$ (–, +) olur.
3. bölgede ise $x < 0, y < 0$ (–, –) olur.
4. bölgede ise $x > 0, y < 0$ (+, –) olur.

4. Örnek

A(a – 2, b – 1) noktası analitik düzlemin 1. bölgesinde olduğuna göre a ve b nin alabileceği en küçük tam sayı değerlerinin çarpımını bulunuz.

Çözüm

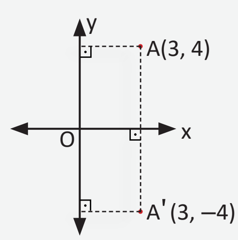
A(a – 2, b – 1) 1. bölgede olduğuna göre $a - 2 > 0$ ve $b - 1 > 0$ olur.
$a > 2$ ve $b > 1$ için $a = 3$ ve $b = 2$ olur.
$a \cdot b = 3 \cdot 2 = 6$ elde edilir.

5. Örnek

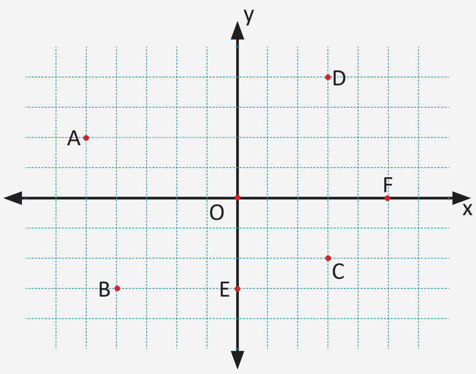
Analitik düzlemde A(3, b+2) noktasının eksenlere olan uzaklıkları toplamı 7 birim olduğuna göre b nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

Çözüm

b nin alabileceği değere göre
$b + 2 < 0$ veya $b + 2 > 0$ olur. A noktası 1. veya 4. bölgede olabilir. Buna göre
b + 2 nin x eksenine uzaklığı $|b + 2|$ birim,
3 ün y eksenine uzaklığı 3 birim olur.
$|b + 2| + 3 = 7 \Rightarrow |b + 2| = 4$
$b + 2 = 4$ veya $b + 2 = -4$
$b = 2$ veya $b = -6$
b nin alabileceği değerler toplamı $2 + (-6) = -4$ olur.
Bu noktalar yandaki şekilde gösterilmiştir.



6. Örnek



Birimkarelere ayrılmış yandaki analitik düzlemde

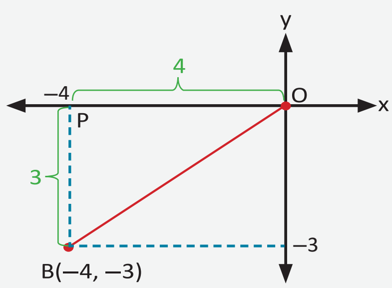
a) A, B, C, D, E, O ve F noktalarının koordinatlarını yazınız.

b) B ile E, D ile C, O ile B arasındaki uzaklıkların kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

a) Analitik düzlemde koordinatlar yazılırken önce x değeri, sonra y değeri yazılır.
A(–5, 2), B(–4, –3), C(3, –2), D(3, 4), E(0, –3), F(5, 0) ve O(0, 0) olur.

b) B ile E noktaları yatay eksende aynı hizadadır. Dolayısıyla y değerleri eşittir.
B(–4, –3) ve E(0, –3) olduğuna göre |BE| = |–4 –0| = 4 birimdir.
D ile C noktaları düşey eksende aynı hizadadır. Dolayısıyla x değerleri eşittir.
D(3, 4) ve C(3, –2) olduğuna göre |DC| = |4 – (–2)| = 6 birimdir.
O ile B noktaları arasındaki uzaklık, noktalar yatay veya düşey eksende aynı hizada olmadığından bu yöntemle bulunamaz.



Yandaki şekilde BAO dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

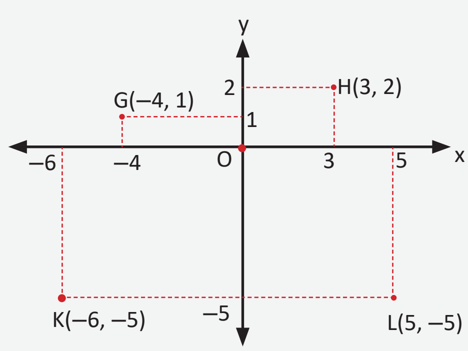
$|PB|^2 + |PO|^2 = |OB|^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = |OB|^2$

$\Rightarrow |OB| = 5$ birim olur.

7. Örnek

G(–4, 1), H(3, 2), K(–6, –5) ve L(5, –5) noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

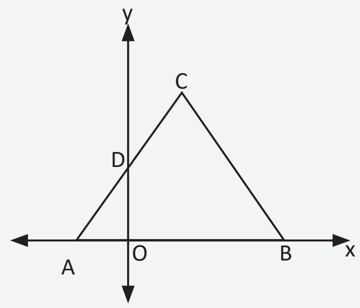
Çözüm



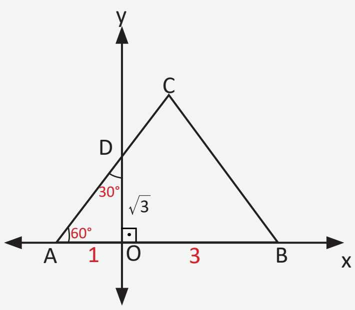
Hatırlatma

- Bir kenar uzunluğu a birim olan ABC eşkenar üçgeninin alanı $A(\widehat{ABC}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ birimkare olur.
- Taban uzunlukları a birim ve c birim, yüksekliği h birim olan ABCD yamuğunun alanı $A(ABCD) = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$ birimkare olur.

8. Örnek



Yandaki analitik düzlemde ABC eşkenar üçgen, $|OB| = 3|OA|$ ve $|OD| = \sqrt{3}$ birim olduğuna göre ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



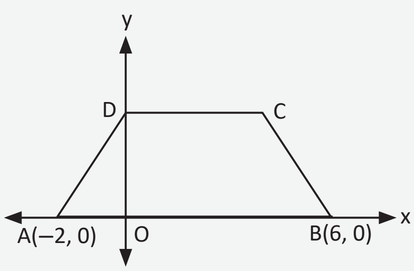
Çözüm

Yandaki analitik düzlemde $|OD| = \sqrt{3}$ birim olduğundan AOD özel üçgeninde $|AO| = 1$ birimdir. $|OB| = 3|OA|$ olduğundan $|AB| = 4$ birim olur.
Bir kenar uzunluğu a birim olan eşkenar üçgenin alanı

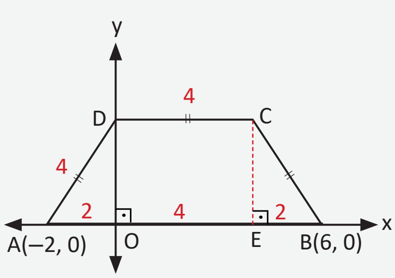
$A(\widehat{ABC}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan

$A(\widehat{ABC}) = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ birimkare olur.

9. Örnek



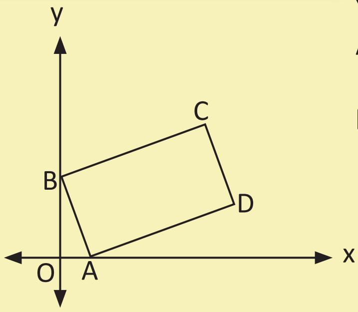
Yandaki analitik düzlemde ABCD ikizkenar yamuk, $[DC] \mathbin{/\!/} [AB]$, $|AD| = |DC| = |BC|$, $A(-2, 0)$, $B(6, 0)$ olduğuna göre ABCD yamuğunun alanını bulunuz.



Çözüm

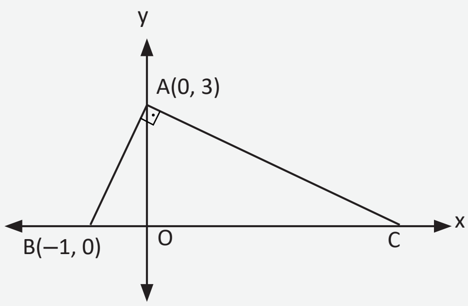
Yandaki analitik düzlemde ABCD ikizkenar yamuğunun C köşesinden bir yükseklik çizildiğinde $|AO| = |EB|$ olur.
AOD üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|DO|^2 + 2^2 = 4^2$
$|DO|^2 = 16 - 4 = 12$
$|DO| = 2\sqrt{3}$ birim olur. Buradan
$A(ABCD) = \frac{4+8}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ birimkare olur.

Sıra Sizde

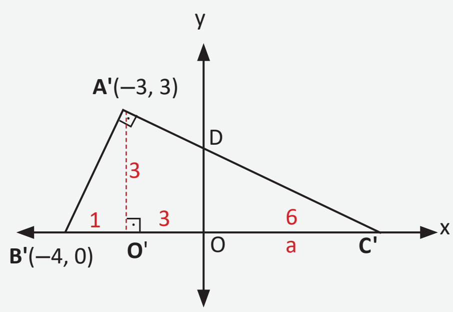


Yandaki analitik düzlemde ABCD dikdörtgen, |OA| = 1 birim, |OB| = 2 birim ve |AD| = 3|AB| olduğuna göre C noktasının koordinatları toplamını bulunuz.

10. Örnek



Şekildeki ABC dik üçgeni 3 birim sola ötelendiğinde elde edilen A'B'C' üçgeninin A'C' kenarının y eksenini kestiği noktanın ordinatının kaç olacağını bulunuz.



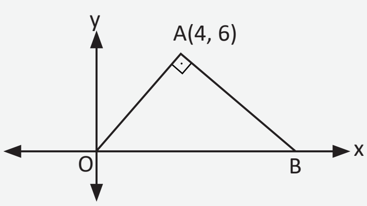
Çözüm

Verilen ABC dik üçgeni 3 birim sola ötelendiğinde **A'**(−3, 3), **B'**(−4, 0) olur.
A' noktasının apsisi −3 olduğundan
|O'O | = 3 birim ve |B'O'| = 1 birim olur.

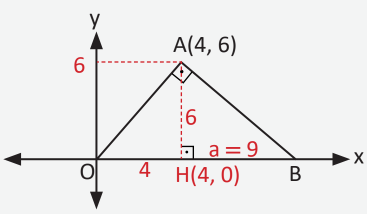
|OC'| = a olsun.
A'B'C' dik üçgeninde Öklid teoremi uygulandığında
$|A'O'|^2 = |B'O'| \cdot |O'C'|$
$3^2 = 1 \cdot (a + 3) \Rightarrow a = 6$ birim olur.

A'O'C' üçgeniyle **DOC'** üçgeni benzerdir (A.A. benzerliği). Benzerlik oranı yazıldığında
$\frac{6}{9} = \frac{|OD|}{3} \Rightarrow |OD| = 2$ birim olur. Buradan D noktasının ordinatı 2 olur.

11. Örnek



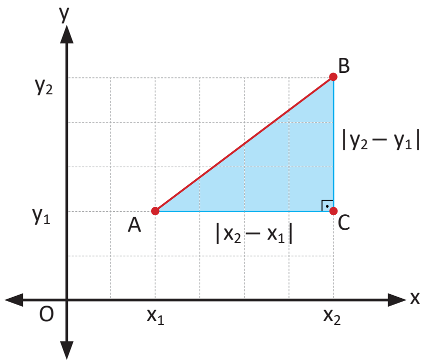
Yandaki şekilde [OB] kenarı x ekseni üzerinde olan AOB dik üçgeni veriliyor. [OA]⊥[BA] ve A(4, 6) olduğuna göre AB uzunluğunu bulunuz.



Çözüm

Şekildeki AOB üçgeninde A köşesinden x eksenine çizilen yüksekliğin uzunluğu |AH| ve |HB| = a olsun.
AOB üçgeninde Öklid teoremi uygulandığında
$|AH|^2 = 6^2 = 4 \cdot a \Rightarrow a = 9$ birim olur.
ABH üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|AB|^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ birim olur.

2.1.1. Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık



Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin.

[AB] hipotenüs ve dik kenarları x ile y eksenine paralel olacak şekilde ABC üçgeni çizildiğinde

$|BC| = |y_2 - y_1|$ ve

$|AC| = |x_2 - x_1|$ olur.

ABC üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında A ile B noktaları arasındaki uzaklık

$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ **$|a - b|^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2$** olduğundan

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ şeklinde elde edilir.

12. Örnek

Analitik düzlemde A(1, 2), B(7, 10) noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$|AB| = \sqrt{(7-1)^2 + (10-2)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{36 + 64} = 10$ birim olur.

13. Örnek

Analitik düzlemde A(x, –4), B(15, 1) noktaları arasındaki uzaklık 13 birim olduğuna göre x in en küçük pozitif değerini bulunuz.

Çözüm

$|AB| = 13 = \sqrt{(15-x)^2 + (1-(-4))^2} \Rightarrow (15-x)^2 + 5^2 = 13^2$

$\Rightarrow (15-x)^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$

$\Rightarrow 15 - x = 12$ veya $15 - x = -12$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = 27$ olur.

x in en küçük pozitif değeri 3 olur.

Sıra Sizde

Dik koordinat sisteminde A(a + 2, b – 5), B(0, b + 3) noktaları arasındaki uzaklık 10 birim olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

14. Örnek

Analitik düzlemde köşe koordinatları A(0, 10), B(–6, 2) ve C(x, 2) olan ABC ikizkenar üçgeninde |AB| = |AC| olarak veriliyor. Buna göre BC uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$|AB| = |AC| \Rightarrow |AB|^2 = |AC|^2$ olur.

Buradan

$(0-(-6))^2 + (10-2)^2 = (0-x)^2 + (10-2)^2$

$6^2 + 8^2 = (-x)^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 6^2$

$\Rightarrow x = 6$ veya $x = -6$ olur.

$x = -6$ için B ve C noktaları çakışık olacağından ABC üçgen olmaz. Buradan yalnızca $x = 6$ olma durumu ABC üçgenini oluşturur.

B(–6, 2) ve C(6, 2) noktaları arasındaki uzaklık

$|BC| = \sqrt{(-6-6)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{12^2 + 0^2} = \sqrt{12^2} = 12$ birim olur.

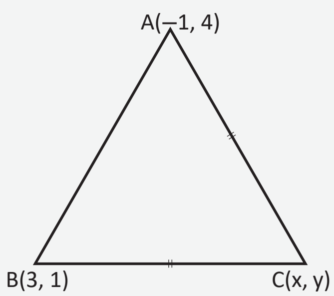
15. Örnek

Analitik düzlemde ABC ikizkenar üçgeni veriliyor. |AC| = |BC|, A(–1, 4), B(3, 1) ve C(x, y) olduğuna göre

a) Üçgenin AB kenar uzunluğunun kaç birim olduğunu,

b) C(x, y) noktasının koordinatları arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm



a) $|AB| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ birim olur.

b) |AC| = |BC| olduğuna göre

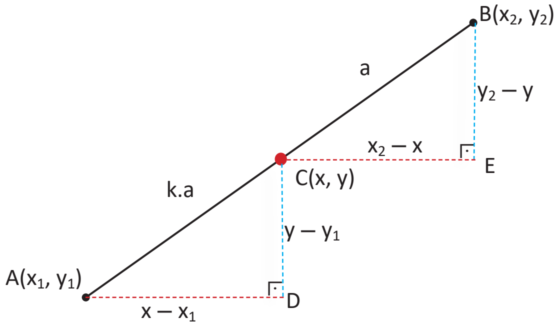
$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1$ olur.

Buradan $8x - 6y + 7 = 0$ bağıntısı elde edilir.

2.1.2. Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Noktanın Koordinatları

1. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $C \in [AB]$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = k$ ise "C noktası [AB] nı k oranında içten böler." denir.



Yukarıdaki şekilde CAD ile BCE dik üçgenleri benzerdir (A.A. benzerliği).

$\frac{|AC|}{|BC|} = k$ olduğundan $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k$ ve $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = k$ olur. Buradan dıştan bölen noktanın

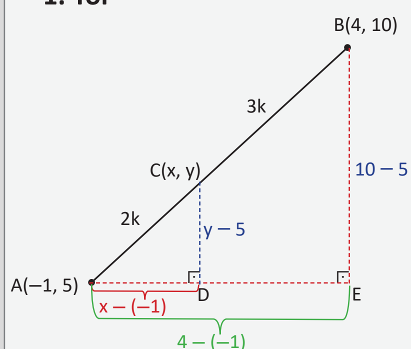
koordinatları $C(x, y) = C\left(\frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}, \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}\right)$ olarak bulunur.

16. Örnek

$A(-1, 5)$ ve $B(4, 10)$ noktaları için AB doğru parçasını $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2}{3}$ oranında içten bölen C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

1. Yol



A ve B noktalarını $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2}{3}$ oranında içten bölen nokta C (x, y) ve $|AC| = 2k$ olsun. Bu durumda $|BC| = 3k$ olur. Buna göre

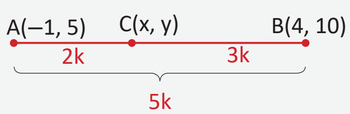
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{4 - (-1)}{x - (-1)} = \frac{5}{2} \Rightarrow 10 = 5x + 5 \Rightarrow x = 1 \text{ ve}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{10 - 5}{y - 5} = \frac{5}{2} \Rightarrow 10 = 5y - 25 \Rightarrow y = 7 \text{ olur.}$$

O hâlde C noktasının koordinatları (1, 7) olarak bulunur.

2. Yol

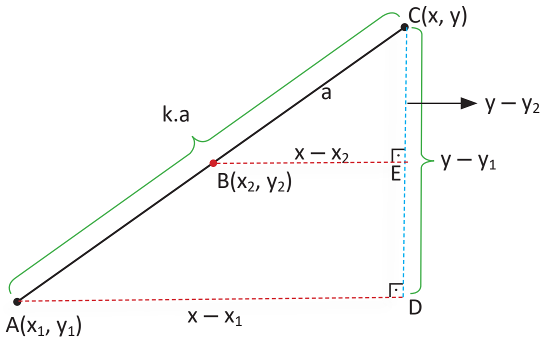
Verilen noktalar bir doğru üzerinde gösterilerek x ve y değerleri arasında değişim (artış veya azalış) miktarları aşağıdaki gibi bulunur.



y değeri A dan B ye	x değeri A dan B ye
5k mesafede 5 arttığından	5k mesafede 5 arttığından
A dan C ye	A dan C ye
2k mesafede 2 artar	2k mesafede 2 artar
$y = 5 + 2 = 7$ olur.	$x = -1 + 2 = 1$ olur.

O hâlde C noktasının koordinatları (1, 7) olarak bulunur.

2. $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin. $C \notin [AB]$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = k$ ise "C noktası [AB] nı k oranında dıştan böler." denir.



Yandaki şekilde CAD ile CBE dik üçgenleri benzerdir (A.A. benzerliği).

$\frac{|AC|}{|BC|} = k$ olduğundan

$\frac{y - y_1}{y - y_2} = k$ ve $\frac{x - x_1}{x - x_2} = k$ olur. Buradan dıştan bölen noktanın koordinatları

$$C(x, y) = C\left(\frac{x_1 - k \cdot x_2}{1 - k}, \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1 - k}\right)$$ olarak

bulunur.

17. Örnek

A(–3, 5), B(2, 7) noktaları veriliyor. $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ oranında [AB] nın uzantısında yer alan C(x, y) noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

1. Yol

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktaları ve [AB] uzantısında $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{3} = k$ oranında bulunan C(x, y) noktası için

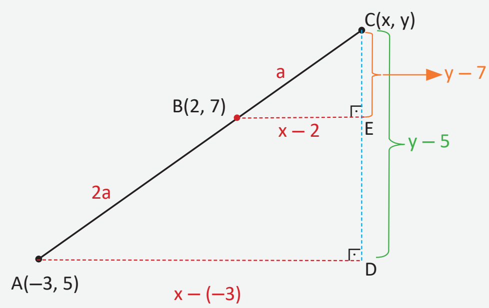
$$\frac{x - 2}{x - (-3)} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ olur.}$$

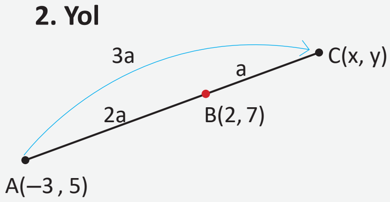
$$\frac{y - 7}{y - 5} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 8 \text{ olur.}$$

O hâlde C noktasının koordinatları

$\left(\frac{9}{2}, 8\right)$ olarak bulunur.



2. Yol



Verilen orandan anlaşılacağı üzere C noktası B ye A dan daha yakındır. O hâlde C noktasının AB doğru parçası üzerindeki konumu yandaki gibi olmalıdır.

x in değişim miktarı ($2 - (-3)$)
A dan B ye 2a mesafede 5 artarsa
B den C ye a mesafede $\frac{5}{2}$ artar.

Buradan $x = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ olur.

y nin değişim miktarı ($7 - 5$)
A dan B ye 2a mesafede 2 artarsa
B den C ye a mesafede 1 artar.

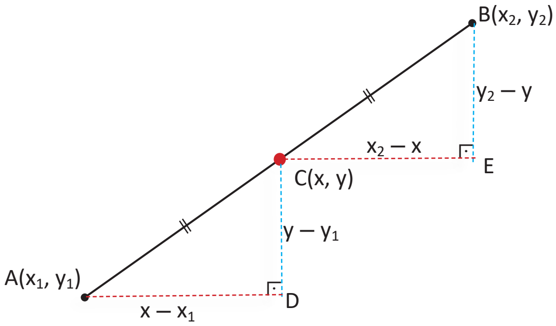
Buradan $y = 7 + 1 = 8$ olur.

O hâlde C noktasının koordinatları $\left(\frac{9}{2}, 8\right)$ olarak bulunur.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verildiğinde oluşacak AB doğru parçasının orta noktası C(x, y) olsun.

Bu durumda $\frac{|CB|}{|AC|} = 1$ olur. C(x, y) noktasının koordinatları aşağıdaki gibi bulunur.



CAD ile BCE dik üçgenleri A.K.A. eşlik bağıntısına göre eştir. Buna göre

$x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ olur.

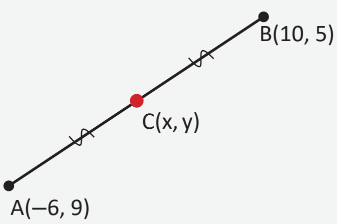
Buradan orta noktanın koordinatları $C(x, y) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ olarak bulunur.

18. Örnek

A(−6, 9), B(10, 5) noktaları için AB doğru parçasının orta noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Yandaki şekilde orta nokta C(x, y) olsun.



$x = \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$y = \frac{9 + 5}{2} = \frac{14}{2} = 7$ olur.

19. Örnek

A(−2, 2a + 3), B(7, 5 − 4a) noktaları verilsin. [AB] nın orta noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre a değerini bulunuz.

Çözüm

C(x, y) orta noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre y = 0 olmalıdır. O hâlde

$y = \frac{2a + 3 + 5 - 4a}{2} = 0$

$\frac{8 - 2a}{2} = 0 \Rightarrow a = 4$ olur.

20. Örnek

Analitik düzlemde A(3, 1), B(7, –5) noktaları veriliyor. [AB] nın orta noktasının D(7, 5) noktasına olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm

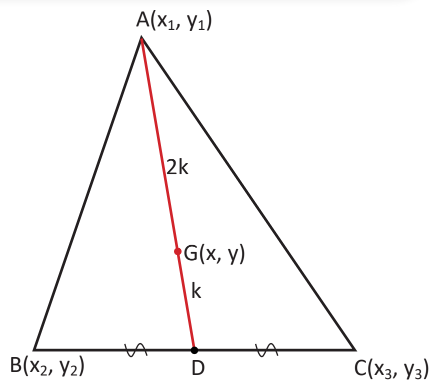
A(3, 1) ve B(7, –5) noktalarının orta noktası C(a, b) olsun.

C(a, b) orta noktasının apsis değeri $a = \frac{3+7}{2} = 5$ ve ordinat değeri $b = \frac{1-5}{2} = -2$ olur.

C (5, –2) noktası ile D(7, 5) noktası arasındaki uzaklık

$|CD| = \sqrt{(7-5)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$ olarak bulunur.

Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları



Köşe koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları G(x, y) olsun.
BC doğru parçasının orta noktasının koordinatları

$D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ olur.

G noktası [AD] nı $\frac{|AG|}{|GD|} = 2$ olacak şekilde böler.

A ile G ve G ile D koordinatları arasındaki farkın oranı 2 ye eşitlenerek G noktasının koordinatları

$$\frac{x_1 - x}{x - \frac{x_2+x_3}{2}} = 2 \Rightarrow x_1 - x = 2x - (x_2 + x_3)$$

$$\Rightarrow 3x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \text{ ve}$$

$$\frac{y_1 - y}{y - \frac{y_2+y_3}{2}} = 2 \Rightarrow y_1 - y = 2y - (y_2 + y_3)$$

$$\Rightarrow 3y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi

$G(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ olur.

21. Örnek

Köşe koordinatları A(0, 7), B(–5, –5) ve C(5, –5) olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Ağırlık merkezi G(x, y) olsun.

$x = \frac{0+(-5)+5}{3} = \frac{0}{3} = 0$ ve $y = \frac{7-5-5}{3} = \frac{-3}{3} = -1$

Buradan ABC üçgeninin ağırlık merkezi G(0, –1) olur.

22. Örnek

Köşe koordinatları A(–3, 4), B(5, 1) ve C(–8, –14) olan üçgenin ağırlık merkezinin orijine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

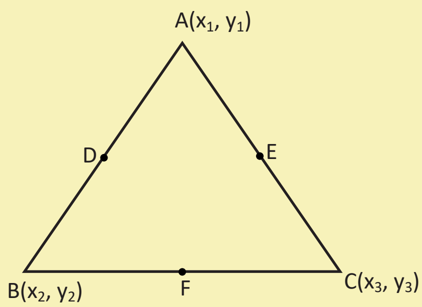
Ağırlık merkezi G(x, y) olsun.

$$x=\frac{-3+5-8}{3}=\frac{-6}{3}\Rightarrow x=-2$$

$$y=\frac{4+1-14}{3}=\frac{-9}{3}\Rightarrow y=-3 \text{ ve } G(-2,-3) \text{ olur.}$$

Orijin O(0, 0) olduğundan $|OG|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ birim olur.

Sıra Sizde

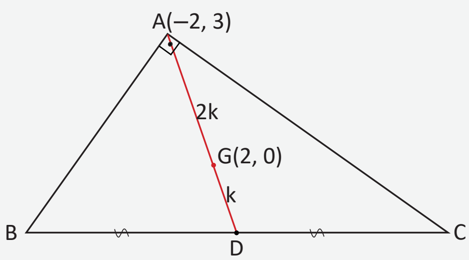


ABC üçgeninde D(–1, 5), E(3, 4) ve F(2, 1) noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Buna göre

$\frac{x_1+x_2+x_3}{y_1+y_2+y_3}\cdot x_2$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

23. Örnek

Bir köşesinin ve ağırlık merkezinin koordinatları sırasıyla A(–2, 3) ve G(2, 0) olan bir ABC üçgeninde [AB]⊥[AC] olduğuna göre |BC| nun kaç birim olduğunu bulunuz.



Çözüm

|DG| = k olsun. Bu durumda |AG| = 2k olur.

$|AG|=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=5$ olduğuna göre

$|GD|=k=\frac{5}{2}$ olur.

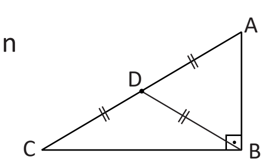
[AB]⊥[AC] ve G ağırlık merkezi olduğuna göre

$$|BC|=2|AD|=2\cdot(3k)$$
$$=6\cdot\frac{5}{2}=\frac{30}{2}=15 \text{ birim olur.}$$

Hatırlatma

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu hipotenüsün yarısına eşittir.

Yandaki şekilde $|BD|=\frac{|AC|}{2}$ olur.



Alıştırmalar

1. A(1, 3), B(0, 5), C(4, 0), D(–2, 3), E(–3, –4) noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

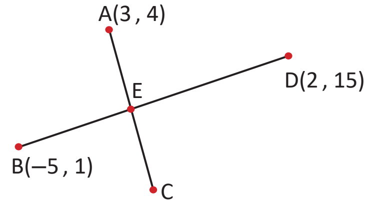
2. D(a – 1, a + 5) noktası analitik düzlemin 2. bölgesinde olduğuna göre a nın alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

3. Analitik düzlemde A(b–2, 5) ve B(–2, a+3) noktaları eksenler üzerinde olduğuna göre a·b değerini bulunuz.

4. $A(a^2 \cdot b, a \cdot b^3)$ noktası analitik düzlemin 2. bölgesinde olduğuna göre B(b, a) noktasının hangi bölgede olduğunu bulunuz.

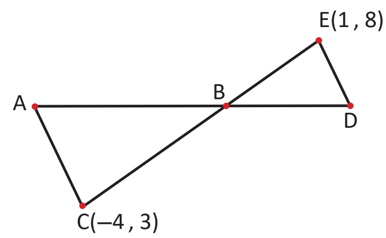
5. Analitik düzlemde A(–3, 3) ve B(–4, –4) noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

6.



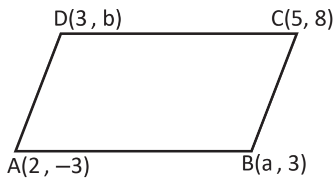
Yukarıdaki şekilde |AE| = |EC| ve $\frac{|BE|}{|ED|} = \frac{3}{4}$ veriliyor. Buna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde [AC] // [ED] ve $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{3}{2}$ olduğuna göre B noktasının koordinatlarını bulunuz.

8. Analitik düzlemde iki köşesi A(1, –2) ve C(–3, 2) olan ABCD karesinin
a) Çevresinin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.
b) Köşegenlerinin kesişim noktasını bulunuz.

9. 

Şekildeki ABCD paralelkenarında a + b değerini bulunuz.

10. Analitik düzlemde köşe koordinatları A(2, 5), B(–3, 1) ve C(–5, 3) olan bir ABC üçgeninde [BC] kenarına ait kenarortayın uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

11. Analitik düzlemde ABC üçgeninin köşeleri A(3, 4), B(–1, 5), C(7, b) ve ağırlık merkezi G(a, 2) olduğuna göre GC uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

12. Analitik düzlemde C ∈ [AB], A(2, 4), B(5, –2) ve |BC| = 2|AC| olduğuna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

13. Analitik düzlemde A(1, 4) noktasına uzaklığı 5 birim olan x ekseni üzerindeki noktaları bulunuz.

14. Analitik düzlemde K(m–2, 4) noktasının eksenlere uzaklıkları toplamı 7 birim olduğuna göre m nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

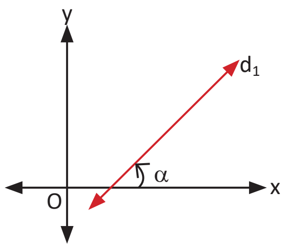
15. Analitik düzlemde ABC üçgeninin AC kenarının orta noktası D(–1, 2) ve üçgenin ağırlık merkezi G(3, –1) olduğuna göre BD uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

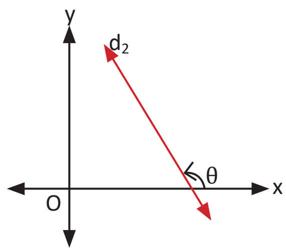
16. Analitik düzlemde A(–2, 3), B(0, 1) noktaları veriliyor. [AB] nı $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{4}{3}$ oranında dıştan bölen C noktasının koordinatlarını bulunuz.

2.1.3. Analitik Düzlemde Doğrular

Doğrunun Eğimi

Bir doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yapmış olduğu açıya **doğrunun eğim açısı** denir.



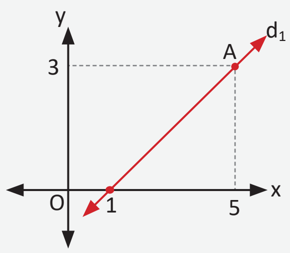


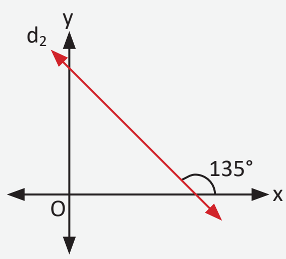
Eğim açısı [0°, 180°) nda bulunur.

Bir doğrunun eğim açısının tanjant değerine **doğrunun eğimi** denir ve eğim **m** ile gösterilir. Yukarıdaki şekillerde d_1 doğrusunun eğim açısı α, d_2 doğrusunun eğim açısı θ olduğunda
d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \tan\alpha$,
d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan\theta$ olur.

24. Örnek

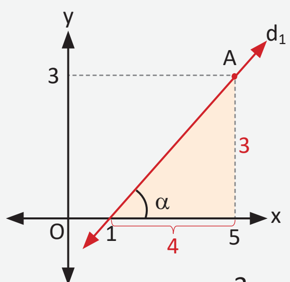
Aşağıda verilen d_1 ve d_2 doğrularının eğimlerini bulunuz.



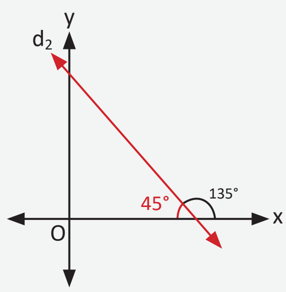


Çözüm

d_1 doğrusunun eğim açısı α olsun. Buna göre $m_1 = \tan\alpha = \frac{3}{4}$ olur.

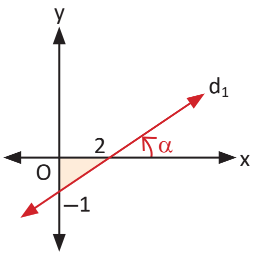


$m_1 = \tan\alpha = \frac{3}{4}$

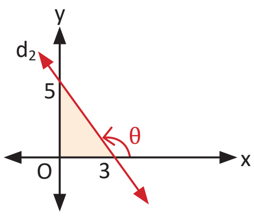


d_2 doğrusunun eğim açısı 135° olduğuna göre $m_2 = \tan 135° = -\tan 45° = -1$ olur.

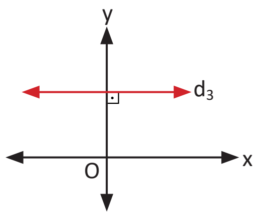
d_1, d_2 , d_3, d_4 doğrularının eğimleri aşağıdaki gibi bulunur.



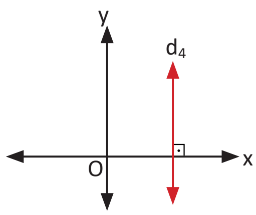
α < 90° olduğundan $m_1 = \tan\alpha = \frac{1}{2}$ olur.



θ > 90° olduğundan $m_2 = \tan\theta = -\frac{5}{3}$ olur.



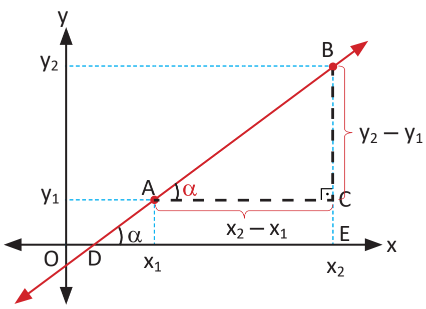
Eğim açısı 0° olduğundan $m_3 = \tan 0° = 0$ olur.



Eğim açısı 90° olduğundan $m_4 = \tan 90° =$ tanımsız olur.

İki Noktadan Geçen Doğrunun Eğimi

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilsin.



AB doğrusunun eğim açısı α olsun. BAC ile BDE açıları yöndeş açılar olduğundan BAC açısının ölçüsü α olur.

ABC dik üçgeninde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi

$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olarak bulunur.

25. Örnek

Analitik düzlemde A(2, 1) ve B(6, 4) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olduğundan

$m = \frac{4-1}{6-2} = \frac{3}{4}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Analitik düzlemde A(5, 2) ve B(8, 3) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

26. Örnek

Analitik düzlemde $A(-\sqrt{3}, 1)$ ve $B(\sqrt{3}, a)$ noktalarından geçen doğru, x ekseniyle pozitif yönlü 120° lik açı yaptığına göre a değerini bulunuz.

Çözüm

Doğrunun eğimi m olsun.

$m = \tan 120° = -\sqrt{3}$ ve $m = \dfrac{a-1}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}$ olduğundan

$m = \dfrac{a-1}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \Rightarrow a-1 = -6 \Rightarrow a = -5$ olarak bulunur.

27. Örnek

Analitik düzlemde A(–1, 3), B(2, –6) ve C(3, a) noktaları doğrusal olduğuna göre a değerini bulunuz.

Çözüm

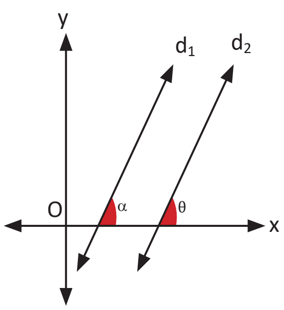
A, B ve C noktaları aynı doğru üzerinde olduğundan bu noktalar ile yazılan eğimler birbirine eşittir. Buradan $m_{AB} = m_{AC}$ olur. O hâlde

$$\frac{-6-3}{2-(-1)} = \frac{a-3}{3-(-1)} \Rightarrow \frac{-9}{3} = \frac{a-3}{4}$$

$$\Rightarrow a-3 = -12 \Rightarrow a = -9 \text{ olur.}$$

Paralel Doğrular

Ortak noktaları olmayan doğrulara **paralel doğrular** denir. Paralel doğrulardan biri y eksenine paralel değilse doğruların eğimleri birbirine eşittir.



d_1 doğrusunun eğim açısı α, eğimi m_1; d_2 doğrusunun eğim açısı θ, eğimi m_2 olsun.
$d_1 // d_2$ olduğundan $\alpha = \theta$ ve $\tan\alpha = \tan\theta$ olur. Buradan $m_1 = m_2$ olur.

28. Örnek

Analitik düzlemde A(1, 3), B(4, 5), C(–1, 3) ve D(a, 7) noktaları veriliyor. $[AB] \parallel [CD]$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

Çözüm

AB doğrusunun eğimi m_{AB} ve CD doğrusunun eğimi m_{CD} olmak üzere

$[AB] \parallel [CD] \Rightarrow m_{AB} = m_{CD}$ olur.

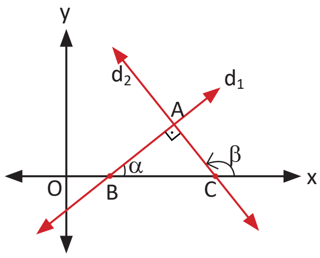
$m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-3}{4-1} = \dfrac{2}{3}$

$m_{CD} = \dfrac{7-3}{a-(-1)} = \dfrac{4}{a+1}$ olur. Buradan

$\dfrac{4}{a+1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow a+1 = 6 \Rightarrow a = 5$ olur.

Dik Kesişen Doğrular

Birbirine dik olan iki doğrudan herhangi biri eksenlere paralel değilse bu iki doğrunun eğimleri çarpımı – 1 olur.



d_1 doğrusunun eğim açısı α, eğimi m_1; d_2 doğrusunun eğim açısı β, eğimi m_2 olsun. Bu durumda

$m_1 = \tan\alpha$ olur.

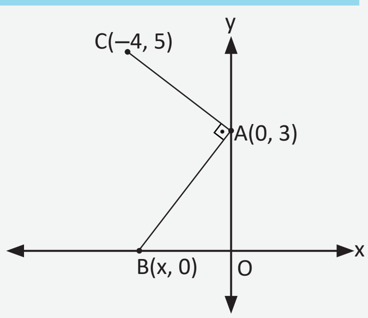
$\beta = 90° + \alpha$ olduğundan

$m_2 = \tan\beta = \tan(90° + \alpha) = -\cot\alpha$ olur. Buradan d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri çarpımı

$m_1 \cdot m_2 = \tan\alpha \cdot (-\cot\alpha) = -1$

$\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$ olur.

29. Örnek



Şekilde [AB]⊥[AC], A(0, 3) ve C(–4, 5) olduğuna göre B(x, 0) noktasının apsisini bulunuz.

Çözüm

Yukarıdaki şekilde A ve C noktasından geçen doğru ile B ve A noktasından geçen doğru birbirine dik olduğundan bu doğruların eğimleri çarpımı –1 olmalıdır.

$$m_{AC} = \frac{5-3}{-4-0} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{3-0}{0-x} = \frac{3}{-x}$$

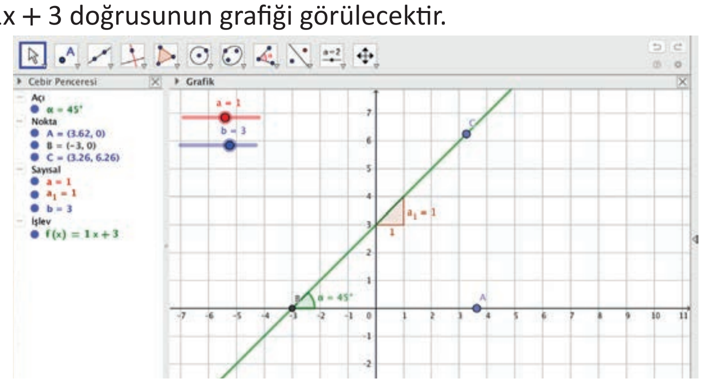
$$m_{AC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{-x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ olur.}$$

1. Uygulama: Doğrusal Fonksiyonların Grafiği

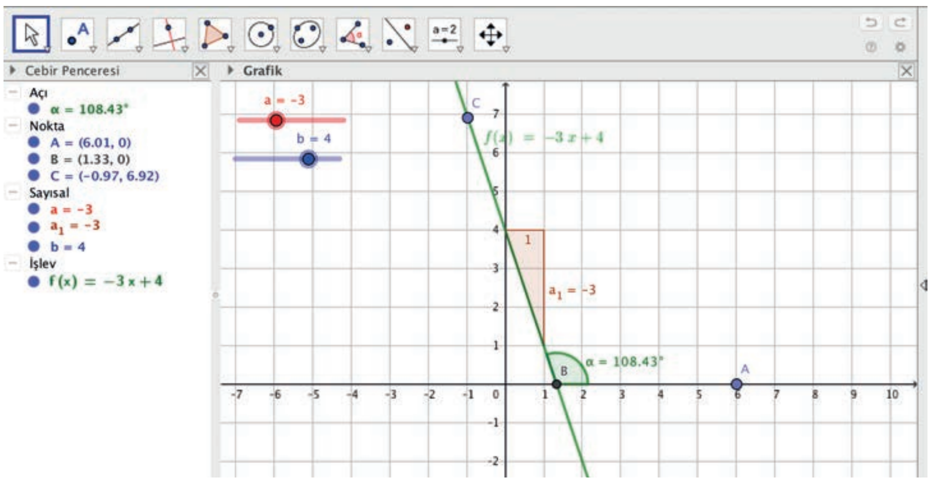
Eğim	Kesiştir

a ve b sürgülerini oluşturunuz. Sürgülerin **minimum** değerini **–10**, **maksimum** değerini **10**, **artış** değerini **1** yapınız.

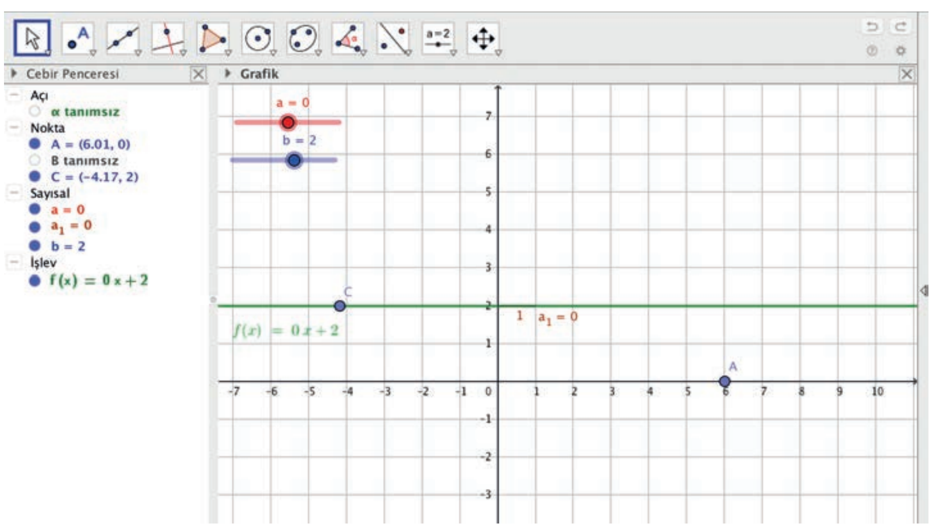
Girişe ax+b yazarak Enter tuşuna basınız. Sürgüleri a = 1, b = 3 konumuna getirdiğinizde ekranda f(x) = 1x + 3 doğrusunun grafiği görülecektir.



Nokta ikonuna tıklayarak eğim açısını belirlemek için biri açının köşesinde, diğer ikisi açının kenarları üzerinde olacak şekilde A, B, C noktalarını oluşturunuz. **Açı** ikonuna, ardından sırasıyla A, B, C noktalarına tıklayarak doğrunun eğim açısının ölçüsünü belirleyiniz.
Eğim ikonuna, ardından doğrunun üzerine tıklandığında doğrunun eğimi $a_1 = 1$ olarak görülecektir.
Eğim açısının tanjantı ile eğim arasındaki ilişkiye,
Dar açıların ölçüleri için tanjant değeri pozitif olduğundan eğimin de pozitif olduğuna,
$f(x) = 1x + 3$ doğru denkleminde x in katsayısı ile doğrunun eğiminin birbirine eşit olduğuna,
$f(x) = 1x + 3$ doğru denkleminde sabit terim ile doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatının eşit olduğuna dikkat ediniz.
Sürgüleri $a = -3$, $b = 4$ konumuna getirdiğinizde ekranda $f(x) = -3x + 4$ doğrusunun grafiği görülecektir.

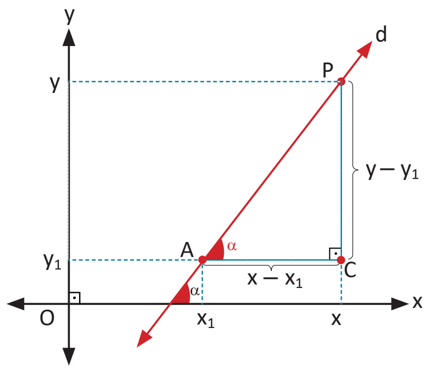


Eğim ikonuna ardından doğrunun üzerine tıklandıktan sonra doğrunun eğimi $a_1 = -3$ olarak ekranda görülecektir.
Geniş açıların ölçüleri için tanjant değeri negatif olduğundan eğimin de negatif olduğuna dikkat ediniz.
Sürgüleri $a = 0$, $b = 2$ konumuna getirdiğinizde ekranda $f(x) = 0 \cdot x + 2 = 2$ doğrusunun grafiğinin x eksenine paralel olduğu görülecektir.
x eksenine paralel olduğundan doğrunun eğim açısı ve eğimi 0 olur.



Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi

Eğimi m olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi, doğru üzerinde değişken bir P(x, y) noktası alınarak bulunur.



Şekildeki d doğrusunun eğim açısı α olsun. Bu durumda CAP açısının ölçüsü α (yöndeş açı) olur.
CAP dik üçgeninde doğrunun eğimi

$m = \tan\alpha$ yazıldığında $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ olur. Buradan eğimi m olan ve $A(x_1, x_2)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $\boxed{\mathbf{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}}$ şeklinde elde edilir.
Bu doğru denklemi düzenlendiğinde

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = m \cdot x - m \cdot x_1$$
$$\Rightarrow y = m \cdot x \underbrace{- m \cdot x_1 + y_1}_{n} = m \cdot x + n \text{ olur.}$$

Eğimi m olan ve y eksenini n noktasında kesen doğrunun denklemi $\boxed{\mathbf{y = m \cdot x + n}}$ biçiminde elde edilir.

30. Örnek

A(–2, 1) noktasından geçen ve eğim açısı 135° olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Eğim açısı 135° olduğuna göre eğim $m = \tan 135° = -1$ olur.
$m = -1$ ve $A(-2, 1)$ değerleri $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ denkleminde yerine yazıldığında
doğrunun denklemi $y - 1 = -1 \cdot (x - (-2)) \Rightarrow y - 1 = -(x + 2)$
$\Rightarrow y = -x - 1$ olarak bulunur.

Sonuç

$x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ eşitliğinde y yalnız bırakıldığında $y = \dfrac{-ax - c}{b} \Rightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ elde edilir. Buradan
$ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\dfrac{a}{b}$ olur.

31. Örnek

A(3, 4) noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğruya dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Denklemi istenen doğrunun eğimi m olsun. Birbirine dik doğruların eğimlerinin çarpımı –1 olduğundan $2 \cdot m = -1$ ise $m = -\dfrac{1}{2}$ olur.

Eğimi $m = -\dfrac{1}{2}$ olan ve A(3, 4) noktasından geçen doğrunun denklemi

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 8 = -x + 3$$
$$\Rightarrow x + 2y = 11 \text{ olur.}$$

32. Örnek

Analitik düzlemde denklemi $y = (a - 2)x + 1$ olan doğrunun eğim açısı 45°olduğuna göre a değerini bulunuz.

Çözüm

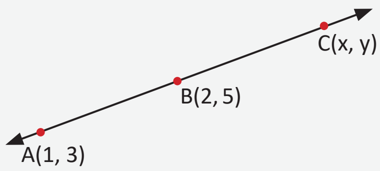
$y = m \cdot x + n$ doğrusunun eğimi m ye eşittir. Buradan

$m = \tan 45° = 1$ ve $m = a - 2$ olduğundan

$a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$ olur.

33. Örnek

Analitik düzlemde bir d doğrusunun A(1, 3), B(2, 5) ve C(x, y) noktalarından geçtiği bilinmektedir. Buna göre C noktasının koordinatları arasındaki bağıntıyı $ax + by + c = 0$ şeklinde bulunuz.



Çözüm

Eğim, A ve B noktaları ile $m_{AB} = \frac{5-3}{2-1} = 2$

C ve B noktaları ile $m_{CB} = \frac{y-5}{x-2}$ olarak yazılır.

Bu noktalar aynı doğru üzerinde olduğundan $m_{AB} = m_{CB}$ olur. Buradan

x ve y arasındaki bağıntı $2 = \frac{y-5}{x-2} \Rightarrow y - 5 = 2x - 4$

$\Rightarrow y = 2x + 1$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0$ şeklinde bulunur.

34. Örnek

Analitik düzlemde A(–2, 3) ve B(0, –1) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

A(–2, 3) ve B(0, –1) noktalarından geçen doğrunun eğimi

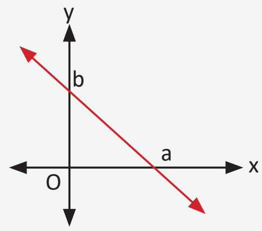
$m = \frac{3-(-1)}{-2-0} = \frac{4}{-2} = -2$ olur.

Eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denkleminden hareketle A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi

$y - (-1) = -2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -2x - 1$ olarak bulunur.

35. Örnek

Yandaki analitik düzlemde A(a, 0) ve B(0, b) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.



Çözüm

A(a, 0) ve B(0, b) noktalarından geçen doğrunun eğimi

$m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$ olur.

Eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ olur.

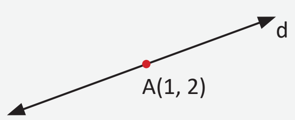
$y - 0 = -\frac{b}{a} \cdot (x - a) \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab$

eşitliğinin her iki tarafı ab ile bölündüğünde

A(a, 0) ve B(0, b) noktalarından geçen doğrunun denklemi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ olarak bulunur.

36. Örnek

Analitik düzlemde denklemi d: $ax - 2y + 1 = 0$ olan doğrunun A(1, 2) noktasından geçtiği bilindiğine göre a değerini bulunuz.



Çözüm

A noktası, doğrunun üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlar. O hâlde

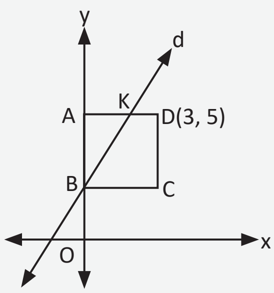
$a \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow a - 4 + 1 = 0$

$\Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ olur.

Sıra Sizde

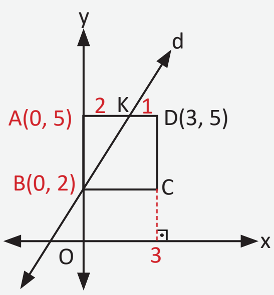
$2x - ay + 8 = 0$ doğrusunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı 2 olduğuna göre a değerini bulunuz.

37. Örnek



Yandaki şekilde ABCD bir kare, D(3, 5) ve |AK| = 2|KD| olduğuna göre d doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm



Şekildeki ABCD karesinin bir kenarı |AD| = 3 birim olur.
Buradan A(0, 5) ve |AK| = 2|KD| olduğundan K(2, 5) olur.
B(0, 2) ve K(2, 5) noktalarından geçen doğrunun eğimi

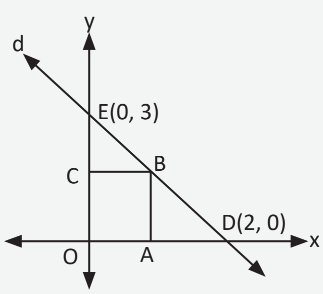
$m = \frac{2-5}{0-2} = \frac{3}{2}$ olur.

Eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denkleminden hareketle d doğrusunun denklemi

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y - 4 = 3x$

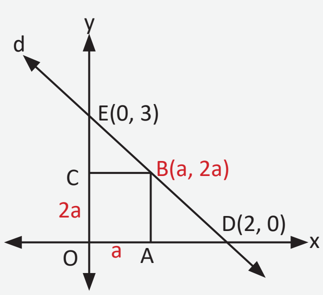
$\Rightarrow 3x - 2y + 4 = 0$ olur.

38. Örnek



Yandaki şekilde d doğrusu OABC dikdörtgeninin B köşesinden geçmektedir.
|AB| = 2|OA|, D(2, 0) ve E(0, 3) olduğuna göre OABC dikdörtgeninin kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm



d doğrusunun denklemi $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ olur.

|AB| = 2|OA| = 2a olsun. Bu durumda

|AB| = 2a, |OA| = a ve B(a, 2a) olur.

B(a, 2a) noktası, doğru üzerindedir ve doğru denklemini sağlar. Buradan

$\frac{a}{2} + \frac{2a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$ olur. O hâlde

$A(OABC) = a \cdot 2a = 2a^2 = 2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{72}{49}$ birimkare olur.

Alıştırmalar

1. Aşağıda eğim açıları verilen doğruların varsa eğimlerini bulunuz.

a) $\alpha = 45°$
b) $\alpha = 120°$
c) $\alpha = 135°$
ç) $\alpha = 90°$
d) $\alpha = 0°$

2. Aşağıda iki noktası verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) A(1, 4), B(−2, 3)
b) A(2, 3), C(0, 1)
c) A(−1, 3), D(2, 5)
ç) A(−2, −3), E(−5, 2)

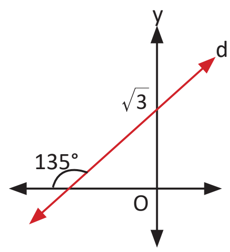
3. Aşağıda eğimleri ve bir noktası verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a) A(1, 2), m = 3
b) B(−2, 3), m = −1
c) $C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, m = 2
ç) D(−3, −5), $m = \frac{1}{3}$

4. Aşağıda bir noktası ve eğim açısı verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a) A(0, 2), $\alpha = 120°$
b) B($\sqrt{5}$, 3), $\alpha = 0°$
c) C(−1, 4), $\alpha = 45°$

5. Yanda grafiği verilen d doğrusunun denklemini yazınız.

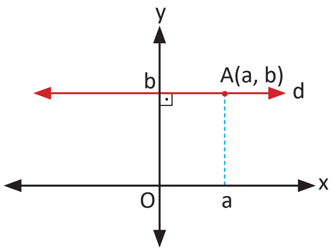


6. Aşağıda iki noktası verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a) A(3, 5), B(−1, 4)
b) C(−2, 4), D(1, 3)
c) E(−1, −3), F(2, 0)
ç) G(3, −2), H(−1, 4)

Eksenlere Paralel Doğru Denklemleri

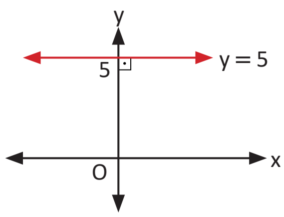
1. x Eksenine Paralel Doğru Denklemleri

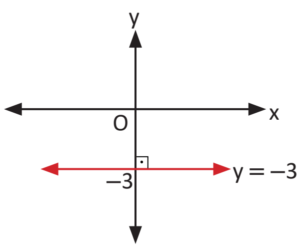


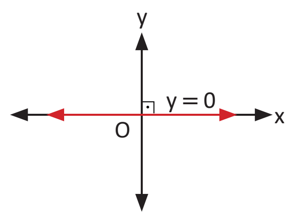
A(a, b) noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemi $y - b = m \cdot (x - a)$ olur.
x eksenine paralel doğruların eğimi $m = 0$ olduğundan

$$y - b = 0 \cdot (x - a) \Rightarrow y - b = 0$$
$$\Rightarrow y = b \text{ olur.}$$

A(a, b) noktasından geçen ve x eksenine paralel doğru denklemleri $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = b$ biçimindedir. Bu doğruların bazıları aşağıdaki gibidir.







39. Örnek

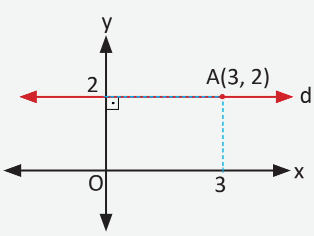
A(3, 2) noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

1. Yol

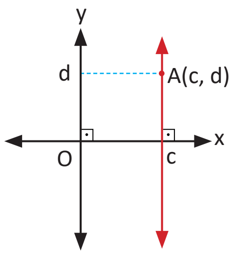
x eksenine paralel olan bir doğru x eksenini kesmez. Doğrunun eğim açısı $\alpha = 0°$ ve eğimi $m = \tan\alpha = \tan 0° = 0$ olur.
$m = 0$ olan ve A(3, 2) noktasından geçen doğrunun denklemi
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ formülünden
$y - 2 = 0 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 2$ şeklinde elde edilir.

2. Yol



Yandaki şekilde görüldüğü gibi d doğrusu üzerindeki herhangi (x, y) noktası (x, 2) biçimindedir.
Bu doğrunun denklemi $y = 2$ olur.

2. y Eksenine Paralel Doğruların Denklemleri

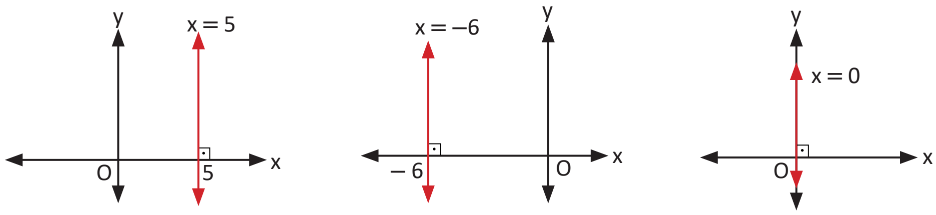


A(c, d) noktasından geçen ve y eksenine paralel olan bir doğrunun denklemi $y - d = m \cdot (x - c)$ olur. Buradan

eğim $m = \dfrac{y - d}{x - c}$ olur.

$m = \tan 90°$ olduğundan doğrunun eğimi tanımsızdır. m tanımsız olduğu için $x - c = 0$ olur. Buradan $x = c$ olarak bulunur.

A(c, d) noktasından geçen ve y eksenine paralel doğruların denklemleri $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = c$ olur. Bu doğruların bazıları aşağıdaki gibidir.

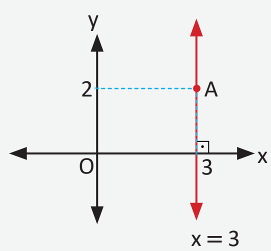


40. Örnek

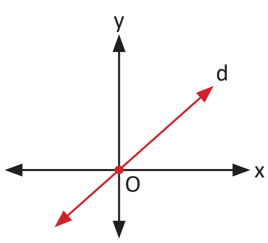
A(3, 2) noktasından geçen ve y eksenine paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Doğru, analitik düzlemde y eksenine paralel olduğundan yandaki gibi çizilir.
Doğrunun denklemi $x = 3$ olur.



3. Başlangıç Noktasından (Orijin) Geçen Doğruların Denklemleri



O(0, 0) noktasından geçen ve eğimi m olan doğru denklemi $y - 0 = m \cdot (x - 0) \Rightarrow y = m \cdot x$ olur.

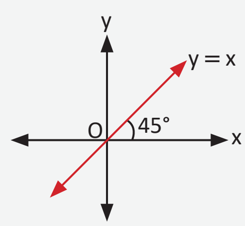
41. Örnek

Eğim açısının ölçüsü 45° olan ve orijinden geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

$m = \tan 45° = 1$ değeri $y = mx$ denkleminde yerine yazıldığında

denklem $y = x$ olarak bulunur.



Sıra Sizde

$y = -ax$ doğrusu $A(-1, 2)$ ve $B(3, b)$ noktalarından geçtiğine göre b değerini bulunuz.

42. Örnek

$A(k, 3k)$ ve $B(4k, 12k)$ noktalarından ve orijinden geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

m eğim olmak üzere orijinden geçen doğrunun denklemi $y = mx$ biçimindedir. O hâlde

$m = \frac{12k - 3k}{4k - k} = \frac{9k}{3k} \Rightarrow m = 3$ olarak bulunur. Buradan $y = 3x$ olur.

43. Örnek

$(k - 2)x + 3y + 5 = 0$ doğrusu x eksenine paralel olduğuna göre k değerini bulunuz.

Çözüm

x eksenine paralel olduğuna göre doğrunun eğim açısı ve eğimi sıfırdır.

$ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ olduğundan

$m = -\frac{k-2}{3} = 0 \Rightarrow k = 2$ bulunur.

44. Örnek

$-2x - ky - y + 1 = 0$ doğrusu y eksenine paralel olduğuna göre k değerini bulunuz.

Çözüm

y eksenine paralel olduğuna göre doğrunun eğim açısı 90° olup eğimi tanımsızdır.

Denklem $-2x - y(k + 1) + 1 = 0$ şeklinde düzenlendiğinde $m = -\frac{-2}{-(k+1)}$ olur.

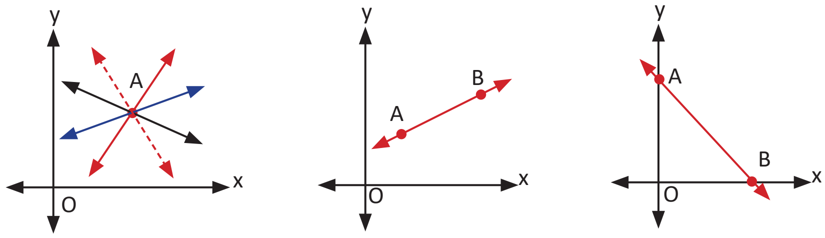
Eğim tanımsız olduğundan $k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$ olur

Sıra Sizde

$3x - 2y - m + 2 = 0$ doğrusu orijinden geçtiğine göre m değerini bulunuz.

Bir Doğrunun Grafiği

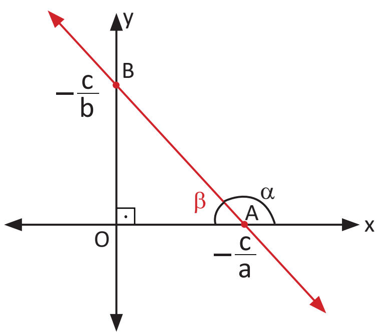
Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi analitik düzlemde alınan herhangi bir A noktasından sonsuz sayıda doğru geçer. Analitik düzlemde alınan herhangi iki noktadan sadece bir doğru geçer.
Bir doğrunun grafiğini çizebilmek için doğrunun üzerindeki iki noktayı bilmek yeterlidir.
İşlemlerin daha kolay olabilmesi için bu noktalar doğrunun x ve y eksenlerini kestiği yerlerden seçilebilir.



$x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ doğrusu eksenleri

$x = 0$ için $y = -\frac{c}{b}$ ve

$y = 0$ için $x = -\frac{c}{a}$ noktalarında keser. Doğru grafiği ve doğrunun eğimi aşağıdaki gibidir.



AB doğrusunun eğim açısı α ve $m(\widehat{BAO}) = \beta$ olsun.

$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta$ olur. Buradan

$\tan\alpha = \tan(180° - \beta) = -\tan\beta$

$m = \tan\alpha = -\tan\beta$

$$\Rightarrow m = -\frac{-\frac{c}{b}}{-\frac{c}{a}} = -\frac{a}{b}$$

$ax + by + c = 0$ doğrularının eğimi $\boxed{m = -\frac{a}{b}}$ olur.

45. Örnek

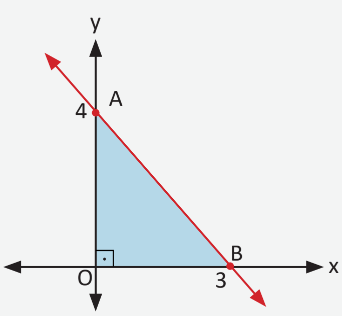
$4x + 3y - 12 = 0$ doğrusunun eksenlerle oluşturduğu kapalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm

$4x + 3y - 12 = 0$ denkleminde

$x = 0$ yazılarak doğrunun y eksenini kestiği nokta $3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$ ve

$y = 0$ yazılarak doğrunun x eksenini kestiği nokta $4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ olarak bulunur.



O hâlde yandaki şekilde oluşan kapalı bölgenin alanı

$A(\widehat{AOB}) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ birimkare olur.

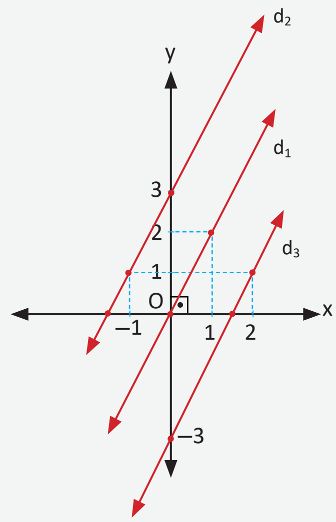
46. Örnek

d_1: $y = 2x$, d_2: $y = 2x + 3$ ve d_3: $y = 2x - 3$ doğrularının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

Çözüm

Doğru üzerindeki herhangi iki noktanın koordinatları bulunarak doğruların grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.

1. $y = 2x$ ise $x = 0$ için $y = 0$,
   $x = 1$ için $y = 2$ olur.
2. $y = 2x + 3$ ise $x = 0$ için $y = 3$,
   $x = -1$ için $y = 1$ olur.
3. $y = 2x - 3$ ise $x = 0$ için $y = -3$,
   $x = 2$ için $y = 1$ olur.



Sonuç

Eğimleri eşit olan doğrular birbirine paraleldir.
Birbirine paralel doğruların eğimleri eşittir.

47. Örnek

d_1: $x + 2y - 6 = 0$ doğrusuna dik olan ve A(1, 4) noktasından geçen d_2 doğrusunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

d_1 doğrusunun eğimi m_1 ve d_2 doğrusunun eğimi m_2 olsun.

Bu durumda $m_1 = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$ olur.

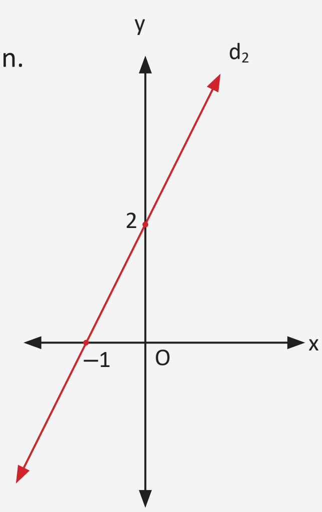
$m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğundan $m_2 = 2$ olur.

A(1, 4) noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğrunun denklemi $y - 4 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x + 2$ olur.

$x = 0$ için $y = 2$ ve

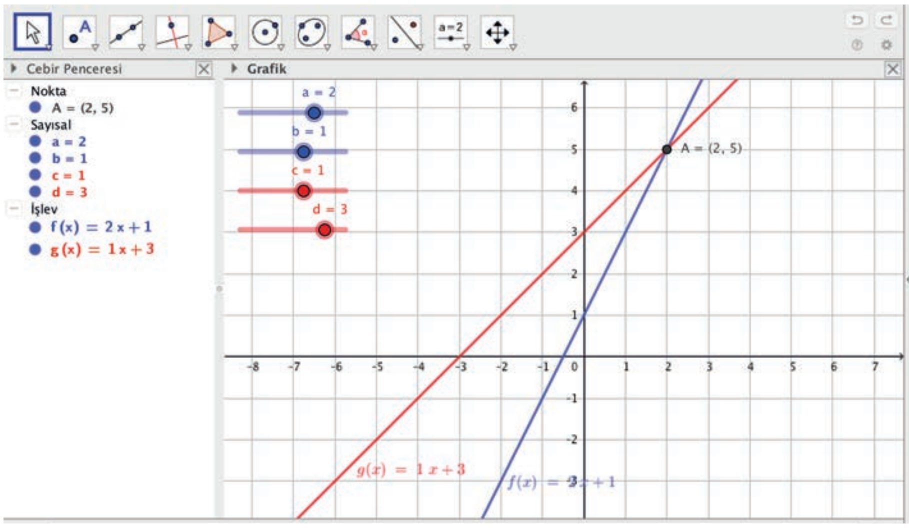
$y = 0$ için $x = -1$ değerleri bulunur.

Bulunan bu değerler için grafik yandaki gibi çizilir.

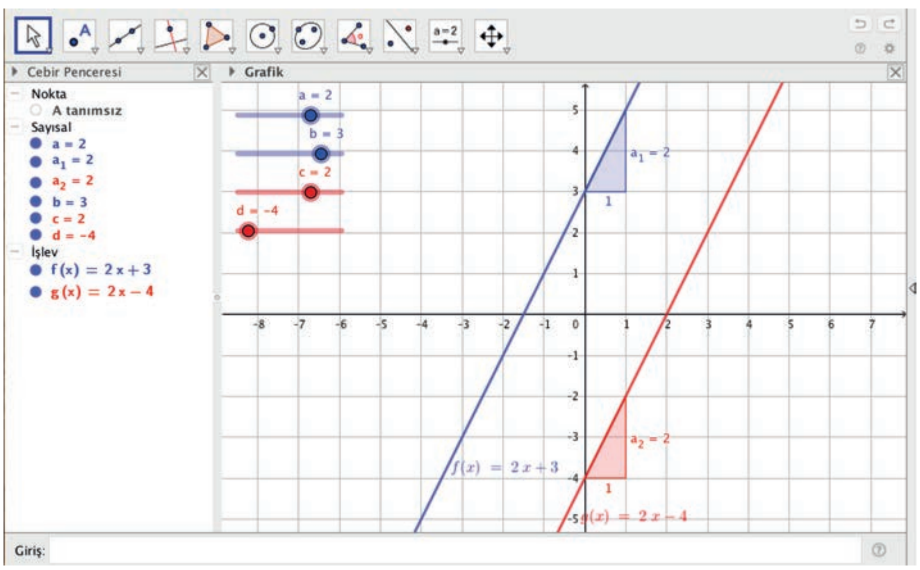


2. Uygulama: İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

a, b, c, d sürgülerini oluşturunuz. a, b, d sürgülerinin **minimum** değerini **–5**, **maksimum** değerini **5**, **artış** değerini **1** yapınız.
c sürgüsünün **minimum** değerini **–5**, **maksimum** değerini **5**, **artış** değerini **0.1** yapınız.
Girişe ax+b yazarak Enter tuşuna basınız.
Girişe cx+d yazarak Enter tuşuna basınız.

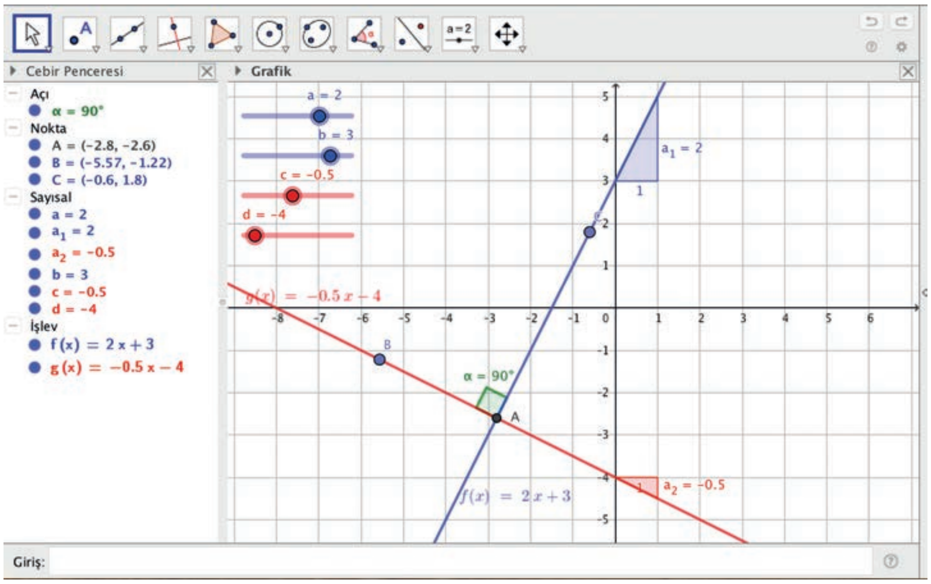


Sürgüleri a = 2, b = 1, c = 1, d = 3 konumuna getirdiğinizde ekranda f(x) = 2x + 1 ve g(x) = 1x + 3 doğrularının grafikleri görülecektir. **Kesiştir** ikonu, ardından iki doğrunun grafikleri tıklandığında iki doğrunun kesiştiği nokta (A) görülecektir. İki doğrunun denklemlerinin ortak çözüm kümesi bulunduğunda doğruların kesişim noktası ile ortak çözüm kümesinin aynı olduğu görülür. Sürgüleri a = 2, b = 3, c = 2, d = –4 konumuna getirdiğinizde ekranda f(x) = 2x + 3 ve g(x) = 2x – 4 doğrularının grafikleri görülecektir.



Eğim ikonuna, ardından doğruların üzerine tıklandığında doğruların eğimleri $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ olarak görülecektir. Eğimleri eşit olduğundan doğrular birbirine paraleldir.

Sürgüleri a = 2, b = 3, c = −0.5, d = −4 konumuna getirdiğinizde ekranda f(x) = 2x + 3 ve g(x) = −0.5x − 4 doğrularının grafikleri görülecektir.



Doğruların eğimleri $a_1 = 2$ ve $a_2 = -0.5$ olarak görülür. Eğimlerin çarpımının −1 olduğuna dikkat ediniz. **Nokta** ikonuna tıklayarak A, B, C noktalarını oluşturunuz. **Açı** ikonuna, ardından sırasıyla C, A, B noktalarına tıklandığında iki doğru arasındaki açının 90° olduğu görülecektir. Eğimleri çarpımı −1 olan doğrular dik kesişir. Dik kesişen doğruların eğimleri çarpımı −1 olur.

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

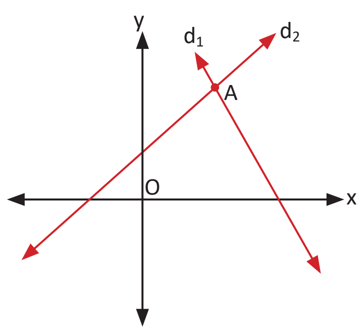
$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları verilsin.
Bu iki doğru birbirine göre üç durumda incelenecektir.

1. d_1 ve d_2 doğruları sadece bir A noktasında kesişebilir.
d_1 doğrusunun eğimi m_1 ve d_2 doğrusunun eğimi m_2 olsun.
Bu durumda $m_1 \neq m_2$ olmalıdır.

$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ve $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ için

$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ olur.



d_1 ve d_2 doğruları sadece bir A noktasında kesiştiğinde

$d_1 \cap d_2 = \{A\}$ olur.

2. d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel olabilir.
Bu durumda $m_1 = m_2$ olur.

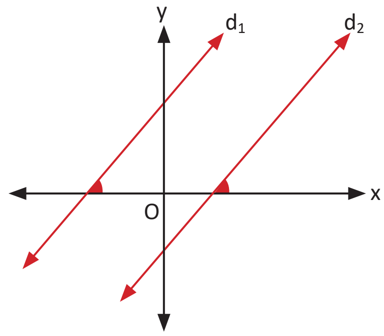
$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ olur.}$$

d_1 ve d_2 doğruları eksenleri farklı noktalarda kestiği için

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ olmalıdır.}$$

Verilen iki doğru $d_1 // d_2$ olduğunda $d_1 \cap d_2 = \{\ \}$ olur.

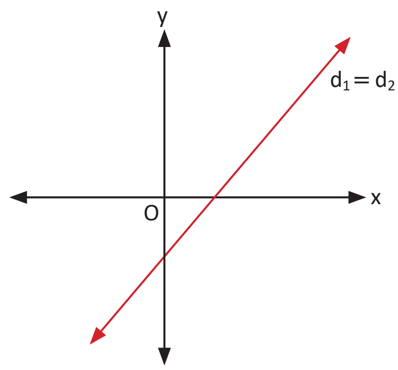


3. d_1 ve d_2 doğruları çakışık olabilir.
Çakışık doğrular bir doğrunun farklı şekillerde adlandırılmasıyla oluşan doğrulardır. Bu doğruların eğimleri ve eksenleri kestiği noktalar aynı olur.

O hâlde $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olur.

d_1 ve d_2 doğruları çakışık olduğunda

$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$ olur.



48. Örnek

$2x + ay - 1 = 0$ ve $-4x + 2y - 3 = 0$ doğrularının ortak noktasının olmaması için a nın alacağı değeri bulunuz.

Çözüm

Verilen iki doğrunun ortak noktasının olmaması için bu doğrular birbirine paralel olmalıdır. Bu durumda

$$d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{a}{2} \neq \frac{-1}{-3} \Rightarrow a = -1 \text{ olur.}$$

49. Örnek

$ax + 3y + 1 = 0$ ve $6x + by + 3 = 0$ doğruları çakışık olduğuna göre $a + b$ değerini bulunuz.

Çözüm

İki doğru çakışık olduğundan $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ olur. Buradan

$\frac{a}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 2$ ve $\frac{3}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = 9$ olur.

O hâlde $a + b = 2 + 9 = 11$ olur.

50. Örnek

$x + 2y - 4 = 0$ ve $2x + y + 1 = 0$ doğrularının kesim noktasını bulunuz.

Çözüm

Doğruların kesim noktasını bulmak için ortak çözüm yapılır.

$-2/\ x + 2y - 4 = 0$

$2x + y + 1 = 0$

$-2x - 4y + 8 = 0$

$+\ 2x + y + 1 = 0$

$-3y = -9 \Rightarrow y = 3$ olur.

Bulunan y değeri $x + 2y - 4 = 0$ denkleminde yerine yazıldığında

$x + 2 \cdot 3 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ olarak bulunur.

O hâlde doğruların kesim noktası $A(-2, 3)$ olur.

51. Örnek

d_1: $2x - ay + 4 = 0$, d_2: $x + 4y - 5 = 0$ ve d_3: $3x - 6y + 7 = 0$ doğrularının kesim noktasını köşe kabul eden üçgenin bir dik üçgen olduğu bilindiğine göre a sayısının alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

Çözüm

$ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ olduğundan

$m_1 = -\frac{2}{-a} = \frac{2}{a}$

$m_2 = -\frac{1}{4}$

$m_3 = -\frac{3}{-6} = \frac{1}{2}$ olur.

$m_2 . m_3 \neq -1$ olduğundan bu iki doğru birbirine dik olamaz. O hâlde

$d_1 \perp d_2$ veya $d_1 \perp d_3$ olmak zorundadır.

$d_1 \perp d_2$ ise $m_1 . m_2 = -1$ olduğundan $\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ olur.

$d_1 \perp d_3$ ise $m_1 . m_3 = -1$ olduğundan $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow a = -1$ olur. Buradan

a nın alabileceği değerler çarpımı $\frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$ olarak bulunur.

52. Örnek

$x + y + 2 = 0$ ve $2x - y - 11 = 0$ doğrularının kesim noktasından ve $B(-1, -2)$ noktasından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm

İki doğrunun kesim noktası ortak çözüm ile bulunur.

$$\begin{array}{r} x + y + 2 = 0 \\ + \quad 2x - y - 11 = 0 \\ \hline 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

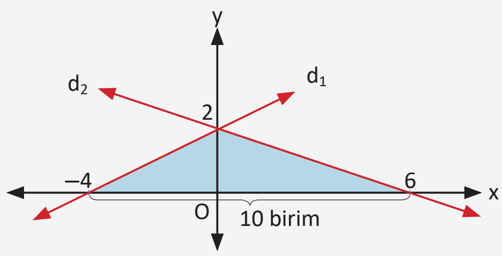
$3 + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -5$ olarak bulunur. Bu durumda doğruların kesim noktası $A(3, -5)$ olur.

$A(3, -5)$ ve $B(-1, -2)$ noktasından geçen doğrunun eğimi $m = \dfrac{-2-(-5)}{-1-3} = -\dfrac{3}{4}$ olur.

53. Örnek

$d_1 : x - 2y + 4 = 0$ ve $d_2 : x + 3y - 6 = 0$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm



d_1 doğrusunun eksenleri kestiği noktalar

$x = 0$ için $y = 2$,

$y = 0$ için $x = -4$ olur.

d_2 doğrusunun eksenleri kestiği noktalar

$x = 0$ için $y = 2$,

$y = 0$ için $x = 6$ olur. O hâlde

$d_1 : x - 2y + 4 = 0$ ve $d_2 : x + 3y - 6 = 0$ doğruları ile

x ekseni arasında kalan bölgenin (boyalı bölge) alanı $\dfrac{10 \cdot 2}{2} = 10$ birimkare olur.

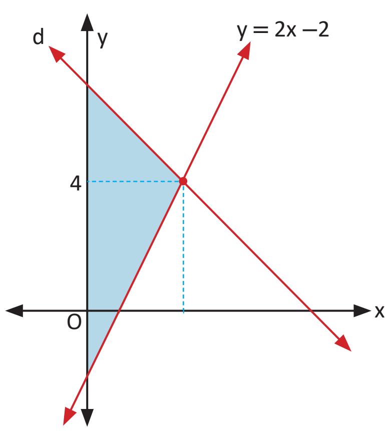
Sıra Sizde

$(a + 1)x - 2y + 1 = 0$ ve $-2x + (a - 2)y + 2 = 0$ doğruları birbirine paralel olduğuna göre a değerlerinin çarpımını bulunuz.

1. $4x + 5y - 20 = 0$ doğrusunun eksenlerle oluşturduğu kapalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2. $4x - 3y - 20 = 0$ ve $x - 2y + 15 = 0$ doğrularının kesim noktasından geçen ve y eksenine dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

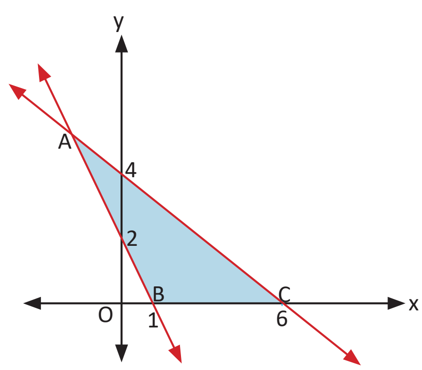
3. Aşağıdaki şekilde $y = 2x - 2$ doğrusu ve d doğrusunun grafiği verilmiştir. Şekilde verilen boyalı bölgenin alanı 12 birimkare olduğuna göre d doğrusunun x eksenini hangi noktada kestiğini bulunuz.



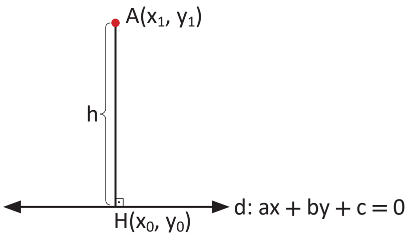
4. $(m + 1)x + y - 2 = 0$ ve $3x + (m - 1)y + 1 = 0$ doğruları paralel olduğuna göre m nin alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

5. $x = 2$, $x = 6$ ve $y = x + 2$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

6. Aşağıdaki şekilde doğruların eksenleri kestiği noktalar verilmiştir. ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



2.1.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı



$A(x_1, y_1)$ noktasının d: $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ formülü ile bulunur.

54. Örnek

A(2, 1) noktasının $4x - 3y + 5 = 0$ doğrusuna olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow h = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$ birim olur.

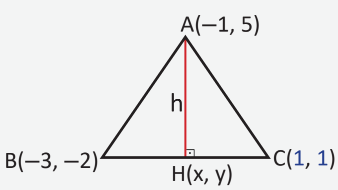
Sıra Sizde

A(3, −2) noktasının $5x - 12y + k = 0$ doğrusuna olan uzaklığı 2 birim olduğuna göre k nin alabileceği değerleri bulunuz.

55. Örnek

A(−1, 5), B(−3, −2) ve C(1, 1) olmak üzere ABC üçgeninde [BC] kenarına ait yüksekliğin kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm



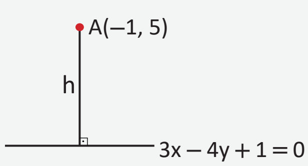
Önce B ve C noktalarından geçen doğrunun denklemi yazılır.

$$m_{BC} = \frac{-2-1}{-3-1} = \frac{3}{4}$$ olur.

Eğimi ve bir noktası bilinen BC doğrusunun denklemi

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 4 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 1 = 0$$ olur.

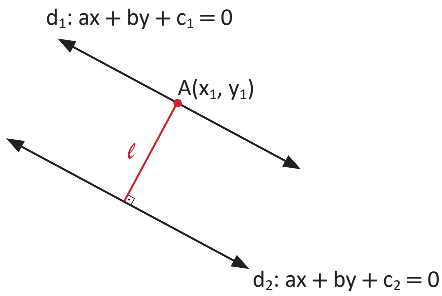


A noktasından [BC] na indirilen dikmenin ayağı H ve $|AH| = h$ olsun. Bu durumda A(−1, 5) noktasının $3x - 4y + 1 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$$h = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-22|}{5} = \frac{22}{5}$$ birim olur.

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Birbirine paralel olan $ax + by + c_1 = 0$ ve $ax + by + c_2 = 0$ doğrularının arasındaki uzaklık aşağıdaki gibi gösterilir.



d_1 doğrusu üzerinde bir A(x_1, y_1) noktası alınır. A noktasının d_2 doğrusuna olan uzaklığı

$\ell = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur.

A noktası d_1 doğrusu üzerinde olduğundan bu nokta doğru denklemini sağlar. Buradan

$ax_1 + by_1 + c_1 = 0$ ve $ax_1 + by_1 = -c_1$ olur.

Bu denklem $\ell = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ eşitliğinde yerine yazıldığında

paralel iki doğru arasındaki uzaklık $\boxed{\ell = \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ olarak bulunur.

56. Örnek

Denklemleri d_1: $4x - 3y - 5 = 0$ ve d_2: $6y - 8x - 20 = 0$ olan d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$6y - 8x - 20 = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-3y + 4x + 10) = 0$

$\Rightarrow -3y + 4x + 10 = 0$

Birbirine paralel doğruların arasındaki uzaklık bulunurken doğru denklemlerindeki x ve y lerin katsayıları eşitlenmelidir.

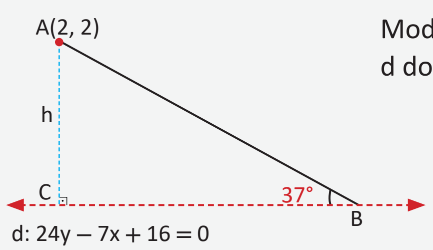
$$\left.\begin{array}{ll} d_1: & 4x - 3y - 5 = 0 \\ d_2: & 4x - 3y + 10 = 0 \end{array}\right\} m_1 = m_2 = \frac{4}{3}$$ olduğundan d_1 ve d_2 doğruları birbirine paraleldir.

d_1 ve d_2 doğruları arasındaki uzaklık $l = \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|10 - (-5)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$ birim olur.

57. Örnek

Bir uçak gemisinin pistinde bulunan kesik çizgilerin denklemi d: $24y - 7x + 16 = 0$ şeklindedir. Bu piste iniş yapan bir uçak, iniş takımlarını A(2, 2) konumunda açıyor. Uçak, pistin B konumlu noktasına yatayla 37° lik bir açıyla iniş yapıyor. Buna göre uçağın ilk konumundaki yüksekliğinin ve havada aldığı doğrusal yolun uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz. (sin37° = 0,6 alınız.)

Çözüm



Modelleme yandaki gibi yapıldığında A noktasının d doğrusuna olan uzaklığı h olur. Buradan

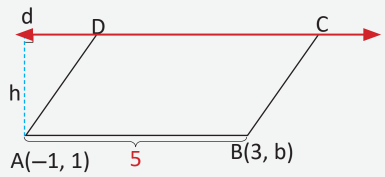
$h = \dfrac{|24 \cdot 2 - 7 \cdot 2 + 16|}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \dfrac{50}{25} = 2$ birim olur.

$\sin 37° = \dfrac{h}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \dfrac{2}{\frac{3}{5}} = \dfrac{10}{3}$ birim olur.

58. Örnek

ABCD paralelkenarında [CD] kenarı d: $3x - 4y - 13 = 0$ doğrusu üzerinde veriliyor. Diğer iki köşesi $A(-1, 1)$ ve $B(3, b)$ olduğuna göre paralelkenarın alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm



A noktasının d doğrusuna uzaklığı

$$h = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 - 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ birim olur.}$$

$m_{AB} = m_{DC}$ olduğundan $\frac{b-1}{4} = -\frac{3}{-4} \Rightarrow b = 4$ olur. Buradan

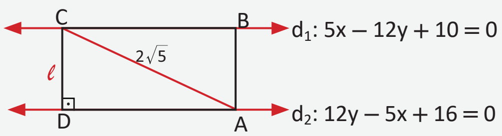
$|AB|^2 = (3 - (-1))^2 + (4 - 1)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow |AB| = 5$ birim olarak bulunur.

Alan $(ABCD) = |AB| \cdot h = 5 \cdot 4 = 20$ birimkare olur.

59. Örnek

İki kenarı $5x - 12y + 10 = 0$ ve $12y - 5x + 16 = 0$ doğruları üzerinde bulunan bir dikdörtgenin köşegen uzunluğu $2\sqrt{5}$ birimdir. Buna göre bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm



d_2: $12y - 5x + 16 = 0$ doğrusu (-1) ile çarpıldığında

d_1: $5x - 12y + 10 = 0$ ve d_2: $5x - 12y - 16 = 0$ doğruları elde edilir. Buradan

iki doğru arasındaki uzaklık $l = \frac{|-16 - 10|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = 2$ olur.

DCA dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$2^2 + |AD|^2 = (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow |AD| = 4$ birim olur.

O hâlde $Ç(ABCD) = 2 + 2 + 4 + 4 = 12$ birim olarak bulunur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

1. Analitik düzlemde yatay eksene .... denir.
2. Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun ....denir.
3. y eksenine .... doğruların eğimleri tanımsızdır.
4. Paralel iki doğrunun eğimleri ....olur.
5. İki bileşeni de negatif olan noktalar analitik düzlemin.......................... bölgesinde yer alır.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6. a ve b sıfırdan farklı olmak üzere eksenleri (a, 0) ve (0, b) noktalarında kesen doğrunun denklemi (   )
7. A(a, b) noktasının orijine olan uzaklığı (   )
8. $x = a$ doğrusunun eğimi (   )
9. $y = b$ doğrusunun eğimi (   )
10. $2y - 3x + 1 = 0$ doğrusunun eğimi (   )
11. $x + 2y - 6 = 0$ doğrusunun y eksenini kestiği nokta (   )

a) tanımsız
b) 0
c) $\sqrt{a^2 + b^2}$
ç) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
d) (0, –3)
e) $\frac{3}{2}$
f) (0, 3)
g) $\sqrt{a^2 - b^2}$
h) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$

C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

12. $A(4 - b, 7 - b)$ noktası analitik düzlemin 2. bölgesinde olduğuna göre A noktasının eksenlere uzaklıkları toplamını bulunuz.

13. $a, b \in \mathbb{R}$; $A(a^2 - 9, 10)$ noktası y, $B(8, b + 3)$ noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre $a \cdot b$ değerlerini bulunuz.

14. Analitik düzlemde A(–1, 4) ve B(4, –6) olmak üzere AB doğru parçasını $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2}{3}$ oranında içten bölen C noktasının koordinatlarının çarpımını bulunuz.

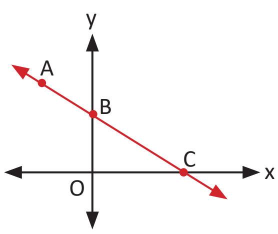
15. Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları A(6, –6), B(x, y), C(–1, 1) ve D(3, –2) olan ABCD paralelkenarı veriliyor. Buna göre $x \cdot y$ değerini bulunuz.

16. Analitik düzlemde köşe noktaları A(2, 3), B(4, 5) ve C(6, 1) olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin BC kenarının orta noktasına olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

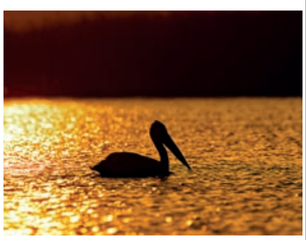
17. Analitik düzlemde A(1, 9), B(k, 3), C(−2, 1) ve D(−2, 7) noktaları veriliyor. AD // BC olması için k değerini bulunuz.

18. ABC eşkenar üçgeninde [AC] kenarı $6x - 8y + 16 = 0$ doğrusu üzerinde ve B(2, −4) olduğuna göre üçgenin AC kenarına ait yüksekliğin kaç birim olduğunu bulunuz.

19. Yandaki şekilde A(−2, 4) noktası BC doğrusu üzerinde ve $2|OB| = |OC|$ olduğuna göre C noktasının apsisini bulunuz.



20. Manyas Gölü'nün kuzeydoğusundaki Kuş Cenneti Millî Parkı'na giriş ücreti 4 TL dir. x adet biletin maliyeti



$m = 0{,}4x + 1746$

denklemiyle ifade edildiğine göre

a) x adet biletin satışından elde edilen gelir denklemini,

b) x adet biletin satışından elde edilen kâr denklemini,

c) Millî parkın 3870 TL kâr elde ettiği haftadaki ziyaretçi sayısını bulunuz.

21. Gıda sektöründe faaliyet gösteren bir firma, 2017 yılında tonu 9 bin TL den x ton fındık ve tonu 35 bin TL den y ton çikolata ihraç ediyor. 2017 yılına ait ihracat gelir denklemi $35y + 9x = 24800$ biçiminde olan firma, 2023 yılında bir ton fındığı 13 bin 500 TL den ve bir ton çikolatayı 52 bin 500 TL den satmayı planlamaktadır. 2023 yılına ait ihracat hedefi 37 milyon 200 bin TL olan bu firmanın hedefine ulaşıp ulaşmayacağını yorumlayınız.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

22. Analitik düzlemde kenarları $4x - 3y + 2 = 0$ ve $8x - 6y + 24 = 0$ doğruları üzerinde bulunan karenin alanı kaç birimkaredir?

A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

23. Analitik düzlemde A(3, 2), B(−4, 5) ve C(k, −2) noktaları veriliyor. [AB]⊥[BC] olması için k değeri kaç olmalıdır?

A) 7 B) 5 C) 4 D) −7 E) −6

24. Analitik düzlemde A(−3, 5) noktasından geçen ve x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yapan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x - y - 2 = 0$
B) $x + y + 2 = 0$
C) $x - y + 2 = 0$
D) $x - y - 8 = 0$
E) $x + y - 2 = 0$

25. Analitik düzlemde $y - 2x - 1 = 0$, $y - 3x + 2 = 0$ ve $mx - 2y + 5 = 0$ doğruları sabit bir noktada kesiştiğine göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) -1

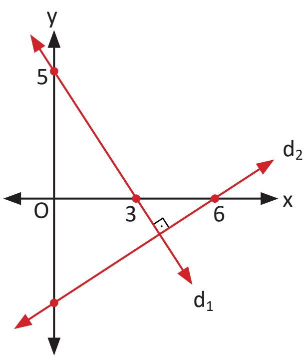
26. Analitik düzlemde köşe koordinatları A(4, 3), B(7, 3) ve C(–3, –1) olan ABC üçgeninin BC kenarına ait kenarortayın uzunluğu kaç birimdir?

A) $5\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

27. Analitik düzlemde $3x - 4y - 8 = 0$ ve $8y - 6x + 6 = 0$ doğruları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28. Yandaki şekilde $d_1 \perp d_2$ olduğuna göre d_2 doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

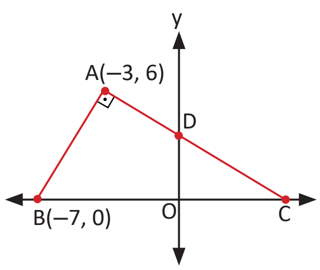


A) $3x - 5y + 30 = 0$ B) $5x + 3y - 30 = 0$

C) $3x + 5y + 30 = 0$ D) $5y + 3x - 18 = 0$

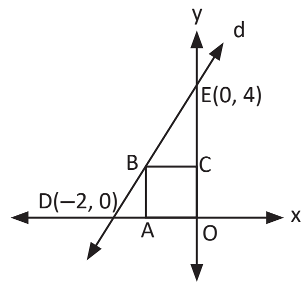
E) $5y - 3x + 18 = 0$

29. Yandaki şekilde [AB]⊥[AC], A(–3, 6), B(–7, 0) olduğuna göre ODC üçgeninin alanı kaç birimkaredir?



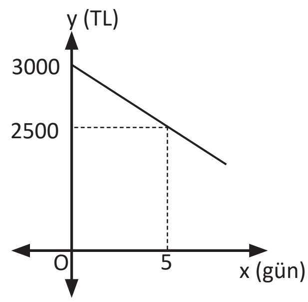
A) 12 B) 10 C) 8 D) 4 E) 2

30. Yandaki şekilde d doğrusu AOBC karesinin B köşesinden geçmektedir. D(–2, 0) ve E(0, 4) olduğuna göre karenin alanı kaç birimkaredir?



A) $\frac{25}{9}$ B) $\frac{16}{9}$ C) $\frac{9}{4}$ D) 3 E) $\frac{9}{16}$

31.



Osman'ın maaşı 3000 TL dir. Yaptığı harcamalardan sonra Osman'ın cebinde kalan paranın zamana göre değişiminin grafiği yukarıda verilmiştir. Harcamalarını aynı şekilde sürdürmesi durumunda maaşı Osman'a kaç gün yeter?

A) 30 B) 23 C) 26 D) 29 E) 22

SAYILAR VE CEBİR

3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

Bu bölümde

- Fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanarak problem çözmeyi,
- İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonun grafiğini çizerek yorumlamayı,
- İkinci dereceden fonksiyonlar ile modellenebilen problemleri çözmeyi,
- Bir fonksiyonun grafiğinden dönüşümler yardımı ile yeni fonksiyon grafikleri çizmeyi

öğreneceksiniz.



KAVRAMLAR

Ortalama Değişim Hızı, İkinci Dereceden Fonksiyon, Tepe Noktası, Parabol, Simetri Ekseni, Öteleme, Simetri, Dönüşüm, Tek Fonksiyon, Çift Fonksiyon

HAZIRLIK ÇALIŞMASI



Futbol müsabakalarında doksan dakika boyunca yoğun tempoda mücadele eden oyuncular, maçın sonuna doğru yorgun düşer. Futbolcuların maçın başında sahip oldukları enerji maçın sonuna doğru azalır.

Maç süresince futbolcularda oluşan enerji değişimi zamana bağlı olarak grafikle nasıl ifade edilebilir?



Dünyanın en yüksek noktası Everest Dağı'nın zirvesi (8 bin 848 metre), en alçak noktası Mariana Çukuru'nun dibidir (10 bin 994 metre).

Bu noktalar hangi matematiksel kavramlarla ifade edilebilir?



Canlılar için hayati önem taşıyan ormanların zamanla azalmasının başlıca sebeplerinden biri yangınlardır. Bir orman yangınının yayılma hızı, hava koşullarına (sıcaklık değişimi, rüzgârın şiddeti, yağış vb.) bağlı olarak değişebilir.

Üç gün devam eden bir orman yangınında hava koşullarının sürekli değişiklik göstermesi durumunda yangının yayılma hızındaki değişim, hava koşullarındaki değişime bağlı olarak nasıl ifade edilebilir?

3.1. Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

3.1.1. Fonksiyonun Grafik ve Tablo Temsilini Kullanarak Problem Çözme

$y = f(x) = ax + b$ Şeklindeki Fonksiyonların Grafikleri ile İlgili Uygulamalar

Bir bitkinin boyunun zamana göre değişimi, bir aracın yakıt tüketimi, bir ürünün alış ve satış fiyatı arasındaki ilişki vb. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = ax + b$ şeklindeki fonksiyonların grafikleri ile ifade edilebilir. Bu bölümde bu türden fonksiyonların grafikleri ile ilgili örnekler verilecektir.

1. Örnek

Bir taksinin taksimetresi açılışta 5 TL, sonraki her 1 km için 2 TL yazmaktadır. Bununla ilgili tablo aşağıda verilmiştir. Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

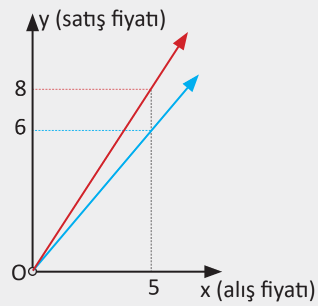
Yol (km)	0	1	2	3	4	5	...
Ücret (TL)	5	7	9	11	13	15	...

a) Yolculuğun mesafesi x olmak üzere yolcunun ödeyeceği ücreti x e bağlı olarak bulunuz.
b) 120 km lik yolculuk için yolcunun ödeyeceği ücreti bulunuz.

Çözüm

a) Ödenecek ücret yolun bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon $f(x)$ olsun.
Yolcu her 1 km için 2 TL, $x \in \mathbb{N}$ için 2x TL ödeyeceğinden ve taksimetre açılış ücreti 5 TL olduğundan $f(x) = 5 + 2x$ TL olur.
b) $f(x) = 5 + 2x \Rightarrow f(120) = 5 + 2 \cdot 120 = 245$ TL

2. Örnek



Yandaki doğrusal grafik bir ürünün alış ve satış fiyatı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu üründen satın alan bir kişi, satış fişini incelediğinde kendisinden 80 TL yerine yanlışlıkla 60 TL alındığını fark ediyor. Bunun üzerine mağazaya dönen kişi 20 TL daha ödüyor. Kişinin 20 TL yi ödemesi veya ödememesi durumları için mağazanın elde edeceği kâr oranlarını bulunuz.

Çözüm

Orijinden geçen doğruların genel denklemi, m eğim olmak üzere $y = mx$ biçimindedir.

Birinci durumda $m_1 = \tan\alpha = \frac{8}{5}$ olduğundan ürünün alış ve satış fiyatı arasındaki ilişki $y = \frac{8}{5}x$ şeklinde elde edilir.

x alış fiyatı, y satış fiyatı olduğundan kâr $= y - x = \frac{8}{5}x - x = \frac{3x}{5}$ olur.

İkinci durumda $m_2 = \tan\beta = \frac{6}{5}$ olduğundan ürünün alış ve satış fiyatı arasındaki ilişki $y = \frac{6}{5}x$ şeklinde elde edilir.

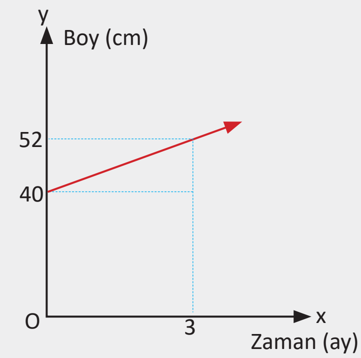
x alış fiyatı, y satış fiyatı olduğundan kâr $= y - x = \frac{6}{5}x - x = \frac{x}{5}$ olur.

Birinci durumda elde edilen kâr oranı $\dfrac{\frac{3x}{5}}{x} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = \%60$,

İkinci durumda elde edilen kâr oranı $\dfrac{\frac{x}{5}}{x} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = \%20$ olarak bulunur.

3. Örnek

Yanda verilen doğrusal grafik, bir bitkinin zamana bağlı olarak boyundaki değişimi göstermektedir. Bitkinin boyunun kaçıncı ayda 96 cm olacağını bulunuz.



Çözüm

1. Yol

Boyun zamana bağlı olarak değişimini gösteren doğru grafiğinin denklemini yazmak için doğrunun eğimini ve geçtiği bir noktayı bulmak gerekir.

Doğrunun eğimi $m = \tan\alpha = 4$ ve geçtiği nokta $(x_1, y_1) = (0, 40)$ olur.

Dolayısıyla bu doğrunun denklemi

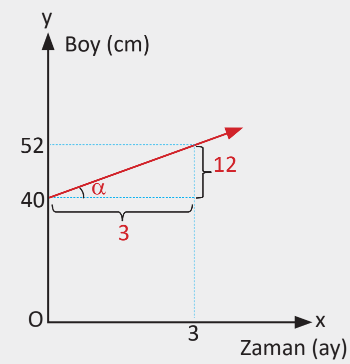
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 40 = 4 \cdot (x - 0)$

$\Rightarrow y = 4x + 40$ olur.

Bitkinin boyu $y = 96$ cm olacağından

$96 = 4x + 40 \Rightarrow 4x = 56 \Rightarrow x = 14$ olur.

14. ayda bitkinin boyu 96 cm olur.



2. Yol

Bitki, 3 ayda 12 cm uzadığına göre bir ayda 4 cm uzar.

Bitkinin $96 - 40 = 56$ cm uzaması için $\frac{56}{4} = 14$ aya ihtiyaç vardır.

4. Örnek

Bir çocuğun kumbarasında 10 TL vardır. Çocuk, kumbarasına her gün 3 TL atıyor. Bununla ilgili tablo aşağıda verilmiştir. Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Zaman (Gün)	0	1	2	3	4	5	...
Para Miktarı (TL)	10	13	16	19	22	25	...

a) Kumbarada biriken paranın miktarını zamanın bir fonksiyonu olarak yazınız.

b) Kumbarada 25. günde birikecek paranın miktarını bulunuz.

Çözüm

a) x, gün sayısı olsun.

Çocuk, kumbaraya her gün 3 TL attığında kumbaradaki para x günde 3x TL olur.

Baştaki 10 TL de eklendiğinde paranın miktarı x gün sonra $f(x) = 10 + 3x$ olarak bulunur.

b) 25. günde toplanan paranın miktarı

$f(25) = 10 + 3 \cdot 25 = 85$ TL olur.

Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar

Polinom fonksiyonlarının grafiği x veya y eksenini en az bir noktada keser.
Analitik düzlemde bir fonksiyon grafiğinin eksenleri kestiği noktalar aşağıdaki gibi bulunur.
Koordinat sisteminde x ekseni üzerindeki noktaların ordinatları sıfır olduğundan bir fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktayı bulmak için fonksiyonda y yerine sıfır yazılır ve x değeri veya değerleri bulunur. Benzer şekilde y ekseni üzerindeki noktaların apsisleri sıfır olduğundan fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği noktayı bulmak için fonksiyonda x yerine sıfır yazılır ve y değeri bulunur.

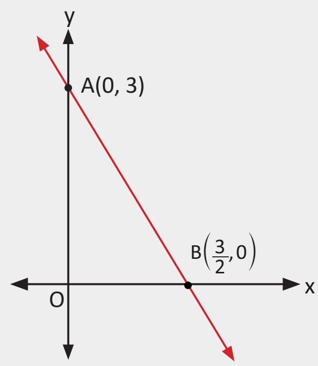
5. Örnek

Analitik düzlemde her $x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 3x - 4$

Çözüm

a) $y = -2x + 3$ fonksiyonunun grafiği
$x = 0$ için $y = 3$ olur. O hâlde
fonksiyonun grafiği y eksenini (0, 3) noktasında keser.
$y = 0$ için $0 = -2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ olur.
O hâlde fonksiyonun grafiği x eksenini $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ noktasında keser.
Bu fonksiyonun grafiğinin x ve y eksenlerini kestiği noktalar yandaki grafikte görülmektedir.



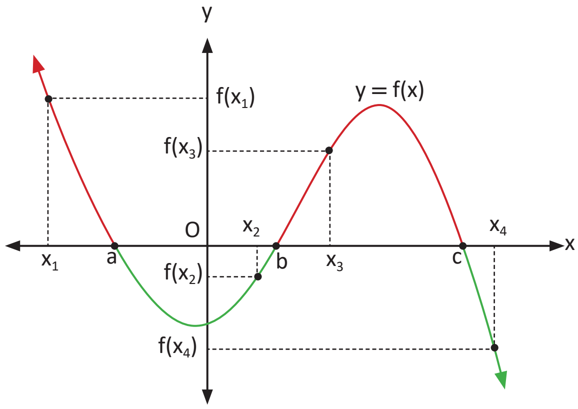
b) $y = x^2 + 3x - 4$ fonksiyonunun grafiği
$x = 0$ için $y = -4$ olur.
O hâlde fonksiyonun grafiği y eksenini (0, –4) noktasında keser.
$y = 0$ için $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)\cdot(x + 4) = 0$
$\Rightarrow x = 1$ ve $x = -4$ olur.
O hâlde fonksiyonun grafiği x eksenini (1, 0) ve (–4, 0) noktalarında keser.

Sıra Sizde

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^3 + 2kx - 4 + k$ fonksiyonunun grafiği x eksenini (–2, 0) noktasında kestiğine göre k değerini bulunuz.

Fonksiyonun Pozitif ve Negatif Olduğu Aralıklar

Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıklar grafik üzerinden açıklanacaktır.

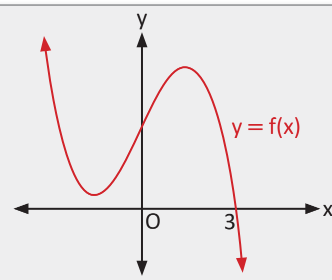


Yukarıdaki grafikte $x_1 < a$ ve $b < x_3 < c$ için sırasıyla $f(x_1)$ ve $f(x_3)$ değerleri pozitiftir. Böylece f(x) fonksiyonunun pozitif değer aldığı aralıkların $(-\infty, a)$ ve (b, c) olduğu görülür. Grafiğin x ekseninin üst kısmında kalan bölümlerinde her x değeri için $f(x) > 0$ olur.

Grafikte $a < x_2 < b$ ve $c < x_4$ için sırasıyla $f(x_2)$ ve $f(x_4)$ değerleri negatiftir. Böylece f(x) fonksiyonunun negatif değer aldığı aralıkların (a, b) ve (c, ∞) olduğu görülür. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseninin altında kalan bölümlerinde her x değeri için $f(x) < 0$ olur.
Fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği a, b, c noktaları $f(x) = 0$ **denkleminin kökleri**dir.

6. Örnek

Şekildeki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği x eksenini (3, 0) noktasında kesmektedir. Bu fonksiyonun negatif ve pozitif olduğu aralıkları bulunuz.

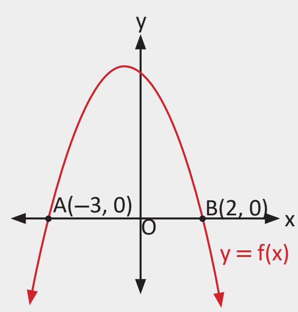


Çözüm

Grafiğin x ekseninin üst kısmında olduğu aralık $(-\infty, 3)$ olur.
Bu aralıktaki her x değeri için $f(x) > 0$ olur.
Grafiğin x ekseninin alt kısmında olduğu aralık $(3, \infty)$ olur.
Bu aralıktaki her x değeri için $f(x) < 0$ olur.
f(x) fonksiyonunun pozitif olduğu aralık $(-\infty, 3)$ olur.
f(x) fonksiyonunun negatif olduğu aralık $(3, \infty)$ olur.

7. Örnek

Şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği A(−3, 0) ve B(2, 0) noktalarından geçmektedir. $f(x) > 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

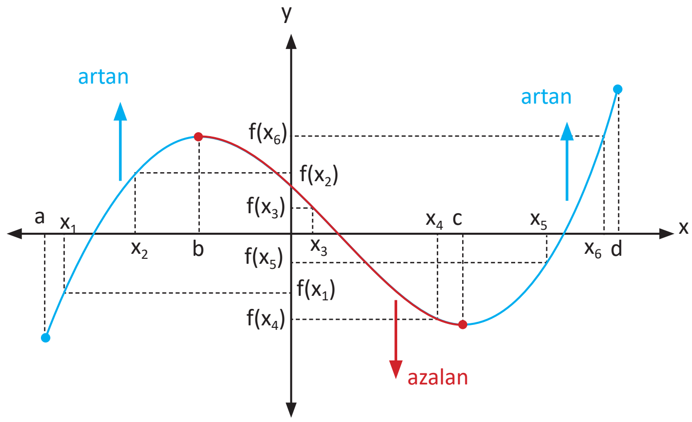


Çözüm

$-3 < x < 2$ aralığında $f(x) > 0$ olur. Bu aralıklardaki tam sayılar −2, −1, 0, 1 olduğundan bu tam sayıların toplamı − 2 olur.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

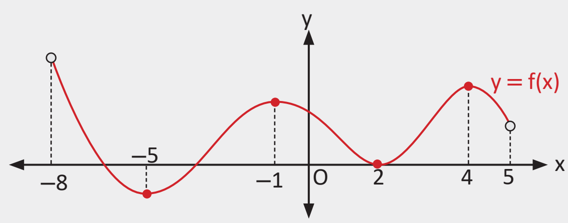
Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar grafik üzerinden açıklanacaktır.



$A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ olacak şekilde bir f fonksiyonu verilsin.
Bu durumda her $x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ olursa
f fonksiyonuna B de **artan fonksiyon** denir.
Her $x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ olursa
f fonksiyonuna B de **azalan fonksiyon** denir. Yukarıdaki grafikte
[a, b] nda alınan $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1 , x_2 için $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan
f fonksiyonu [a, b] nda **artan**dır.
[b, c] nda alınan $x_3 < x_4$ şartını sağlayan her x_3 , x_4 için $f(x_3) > f(x_4)$ olduğundan
f fonksiyonu [b, c] nda **azalan**dır.
[c, d] nda alınan $x_5 < x_6$ şartını sağlayan her x_5 , x_6 için $f(x_5) < f(x_6)$ olduğundan
f fonksiyonu [c, d] nda **artan**dır.

8. Örnek

Şekilde grafiği verilen
$f: (-8, 5) \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun
artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

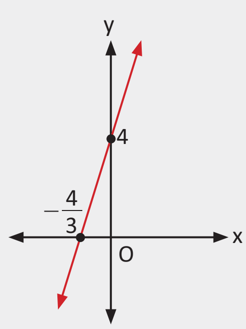


Çözüm

$(-8, -5]$, $[-1, 2]$, $[4, 5)$ nda x değerleri artarken y değerleri azaldığı için fonksiyon azalandır.
$[-5, -1]$, $[2, 4]$ nda x değerleri artarken y değerleri de arttığı için fonksiyon artandır.

9. Örnek

Şekilde grafiği verilen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

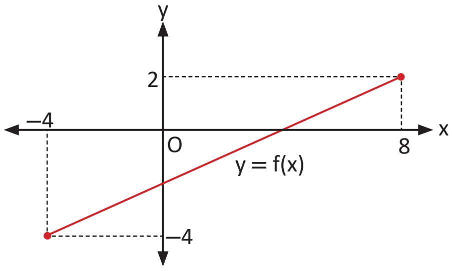


Çözüm

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 < x_2$ olsun.
Buradan $3x_1 + 4 < 3x_2 + 4$ olur. Dolayısıyla $f(x_1) < f(x_2)$ elde edilir.
Buna göre f fonksiyonunun artan olduğu aralık $(-\infty, \infty)$ olur.
Grafikte görüldüğü üzere x değerleri arttıkça f(x) değerleri de arttığından f artan fonksiyondur.

Maksimum ve Minimum Noktalar

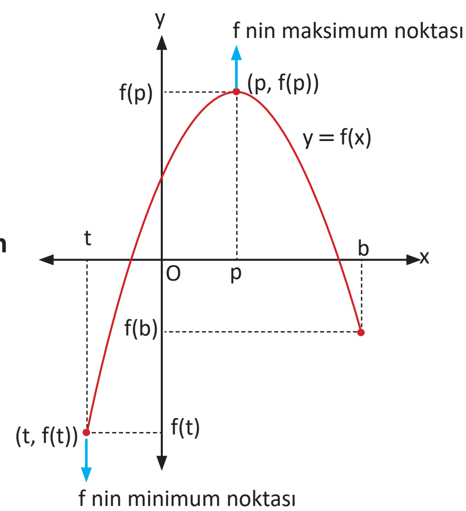
Analitik düzlemde verilen bir fonksiyon grafiğinin görüntü kümesinde aldığı en büyük ve en küçük değerler aşağıdaki gibi bulunur.



Yanda grafiği verilen f: [–4, 8] → [–4, 2], y = f(x) fonksiyonunun aldığı en büyük değer x = 8 için f(8) = 2, en küçük değer x = –4 için f(–4) = –4 olur.

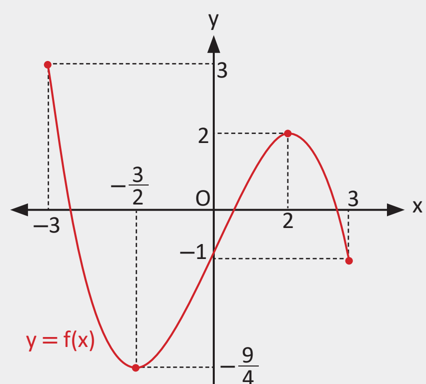
Tanım

A⊆ ℝ olmak üzere f: A → ℝ bir fonksiyon olsun. Her x ∈ A için f(x) ≤ f(p) olacak şekilde bir p ∈ A sayısı varsa (p, f(p)) noktasına f nin **maksimum nokta**sı, f(p) ye f nin **maksimum değer**i denir.
Her x ∈ A için f(x) ≥ f(t) olacak şekilde bir t ∈ A sayısı varsa (t, f(t)) noktasına f nin **minimum nokta**sı, f(t) ye f nin **minimum değer**i denir.



10. Örnek

Şekilde grafiği verilen f: [–3, 3] → ℝ, y = f(x) fonksiyonunun
a) Azalan ve artan olduğu aralıkları,
b) Minimum ve maksimum noktalarını,
c) Minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.



Çözüm

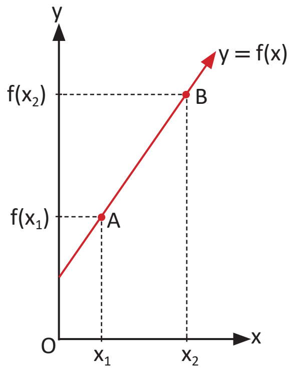
f(x) fonksiyonu için
a) Azalan olduğu aralıklar $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ ve $[2, 3]$ olur. Artan olduğu aralık $\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$ olur.

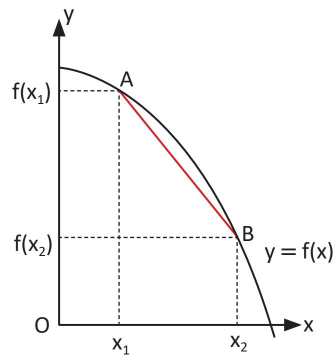
b) Minimum noktası $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ve maksimum noktası (–3, 3) olur.

c) Minimum değeri $-\frac{9}{4}$ ve maksimum değeri 3 olur.

Ortalama Değişim Hızı

Hava şartları, bir bitkinin büyümesini olumlu ya da olumsuz yönde etkiler. Buna göre bir bitkinin büyüme hızının birim zamandaki değişimi farklılık gösterir.
Bir aracın otoyolda belirli bir süre sabit bir hızla ilerlediği varsayılsın. Bu aracın deposunda bulunan yakıtın miktarındaki azalma hızının birim zamandaki değişimi sabit kalır.
Bir nesnede birim zamanda meydana gelen değişimler (artma, azalma vb.) **ortalama değişim hızı** olarak adlandırılır.
Fonksiyonların belli bir aralıktaki ortalama değişim hızı aşağıdaki gibi hesaplanır.



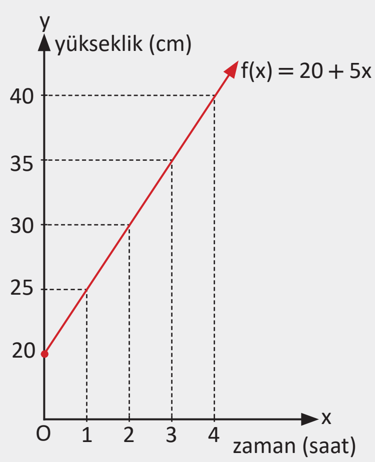


y = f(x) fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ nda ortalama değişim hızı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ olarak tanımlanır.
(Δx: A dan B ye x değerindeki değişim ve Δy: A dan B ye y değerindeki değişim)

- Doğrusal fonksiyonların herhangi bir aralıktaki ortalama değişim hızı sabittir ve doğrunun eğimine eşittir.
- $[x_1, x_2]$ ndaki ortalama değişim hızı $A(x_1, f(x_1))$ ve $B(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen kesenin eğimine eşittir.

11. Örnek

İçindeki suyun yüksekliği başlangıçta 20 cm olan su deposuna bir musluktan su akmaktadır.
$f(x) = 20 + 5x$ fonksiyonuyla ifade edilen suyun yüksekliğinin zamana bağlı değişim grafiği yanda verilmiştir.
Bu fonksiyonun
a) [1, 3] ndaki ortalama değişim hızını,
b) [2, 4] ndaki ortalama değişim hızını bulunuz.



Çözüm

a) [1, 3] ndaki ortalama değişim hızı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{35 - 25}{2} = 5 \text{ cm/sa. olur.}$$

b) [2, 4] ndaki ortalama değişim hızı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$

$$= \frac{40 - 30}{2} = 5 \text{ cm/sa. olur.}$$

Doğrusal fonksiyonlarda ortalama değişim hızı sabittir.

12. Örnek

$f(x) = -x^2 + 15$ fonksiyonu için
a) [1, 2] ndaki ortalama değişim hızını,
b) [–3, 1] ndaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

a) [1, 2] ndaki ortalama değişim hızı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = \dfrac{11-14}{1} = -3$ olur.

b) [–3, 1] ndaki ortalama değişim hızı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(1) - f(-3)}{1-(-3)} = \dfrac{14-6}{4} = 2$ olur.

13. Örnek

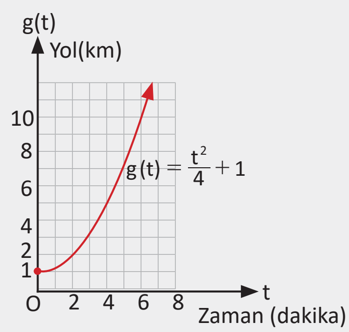
$g(x) = x^3 - 2x + 4$ fonksiyonunun $-2 \le x \le 3$ aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

g nin [–2, 3] ndaki ortalama değişim hızı $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{g(3) - g(-2)}{3-(-2)} = \dfrac{25-0}{5} = 5$ olur.

14. Örnek

Şekildeki grafik bir aracın zamana bağlı olarak aldığı yolu göstermektedir.
Aracın 1 ile 6. dakika arasında (1 ile 6. dakikalar dâhil) aldığı yolun ortalama değişim hızını bulunuz.



Çözüm

$g(1) = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$

$g(6) = \dfrac{36}{4} + 1 = 10$

Ortalama değişim hızı

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(6) - g(1)}{6-1}$$

$$= \frac{10 - \frac{5}{4}}{6-1} = \frac{\frac{35}{4}}{5} = \frac{35}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{4}$$ km/dakika olarak bulunur.

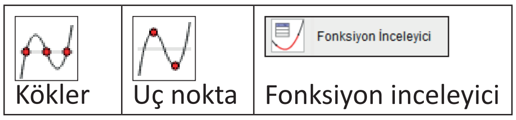
Sıra Sizde

Boyu 20 cm olan bir fidanın dikildikten sonraki boyunun zamana bağlı değişimi aşağıdaki tabloda verilmiştir. Fidanın boyu 1. yılın sonunda 22 cm, 7. yılın sonunda 118 cm olmuştur.

Zaman (yıl)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Boy (cm)	20	22	28	38	52	70	92	118	...

Fidanın boyunun 2 ile 6. yıl arasındaki (2 ile 6. yıllar dâhil) ortalama değişim hızını bulunuz.

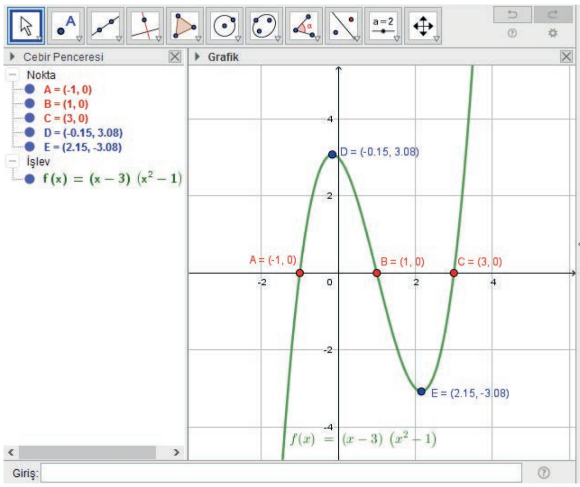
1. Uygulama: Grafiğin x Eksenini Kestiği Noktalar, Tepe Noktaları, Artan-Azalan Aralıklar, Maksimum-Minimum Noktalar



Girişe (x–3)(x^2–1) yazarak grafiği elde ediniz.

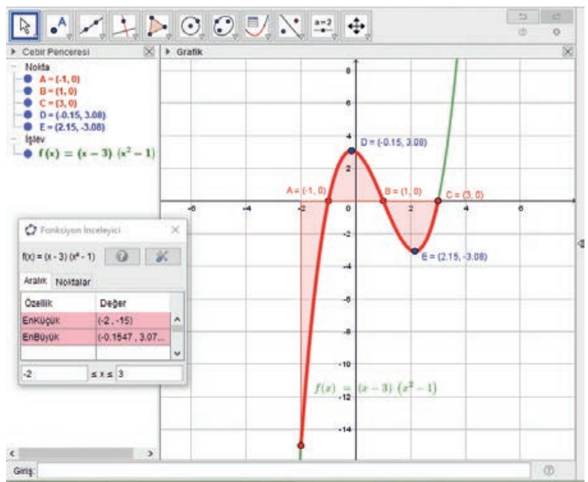
Kökler ikonuna, ardından grafik üzerine tıklandığında fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar A, B, C olarak görülecektir. Fonksiyonun tanımlı olduğu aralık reel sayılar kümesi olduğundan fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları yoktur.

Uç nokta ikonuna, ardından grafik üzerine tıklandığında fonksiyonun tepe noktaları (D ve E) görülecektir. Fonksiyonun artan olduğu aralıklar (–∞, –0.15) ve (2.15, ∞), azalan olduğu aralık (–0.15, 2.15) şeklindedir.

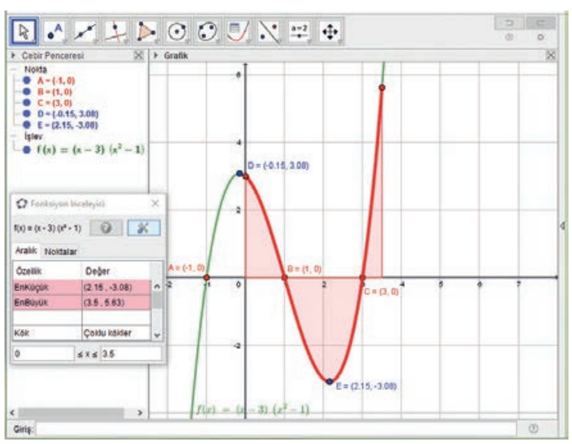


Tanım aralığı ℝ olan fonksiyonun tanım aralığı alt aralıklara indirilerek inceleme yapılabilir. Bunun için **fonksiyon inceleyici** ikonuna, ardından grafiğin üzerine tıklayarak **fonksiyon inceleyici** penceresini açınız.

Tanım aralığını $-2 \leq x \leq 3$ olarak belirleyip grafik incelemesini bu aralık üzerinde yapınız. Grafikten görüldüğü üzere bu aralık kırmızıya dönüşmüş olacaktır. Fonksiyonun x eksenini kestiği noktalar ve tepe noktalarında bir değişiklik yoktur. Fonksiyonun artan olduğu aralıklar (–2, 0.15) ve (2.15, 3), azalan olduğu aralık (–0.15, 2.15) olur. Fonksiyonun maksimum noktası D, maksimum değeri 3.08 olur. Fonksiyonun minimum noktası (–2, –15), minimum değeri –15 olur.



Tanım aralığını $0 \leq x \leq 3.5$ durumuna getirdiğinizde fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar B ve C noktaları olur. Fonksiyonun azalan olduğu aralık (0, 2.15), artan olduğu aralık (2.15, 5.63) olur. Fonksiyon inceleyicide fonksiyonun minimum ve maksimum noktaları görülebilir.



Alıştırmalar

1. Hüseyin, bir iş yerinde staj yapmakta ve evin masraflarına yardımcı olmak için haftalık kazancının yarısını annesine vermektedir.

a) Hüseyin'in annesine verdiği parayı haftalık kazancının bir fonksiyonu olarak yazınız.

b) Hüseyin'in 10. hafta sonunda annesine vereceği toplam parayı haftalık kazancı cinsinden bulunuz.

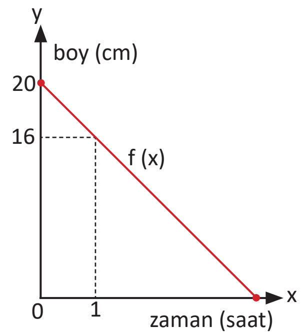
c) Hüseyin'in evin masraflarına yapmış olduğu katkının kaç hafta sonra haftalık kazancının 3 katı olacağını bulunuz.

2. Bir balıkçının belli bir zamana kadar tuttuğu balıkların sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir. Balıkçı 1. saatin sonuna kadar 3 balık, 2. saatin sonuna kadar 8 balık tutmuştur.

Zaman (saat)	1	2	3	4	5
Balık sayısı	3	8	17	21	32

Tabloya göre, 2 ile 5. saatler arasında (2 ile 5. saatler dâhil) tutulan balık sayısındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

3.

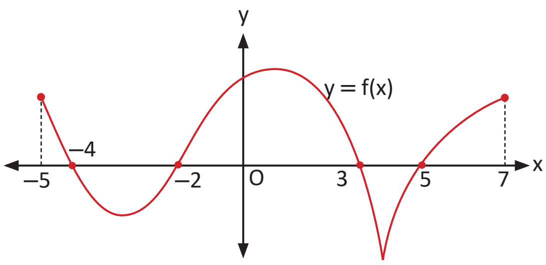


20 cm uzunluğundaki bir mumun yakıldıktan sonraki boyunun grafiği şekildeki gibi doğrusal verilmiştir.

a) Mumun boyunun zamana göre değişimini gösteren f(x) fonksiyonunu bulunuz.

b) Yakıldıktan kaç saat sonra mumun tamamen eriyeceğini bulunuz.

4.

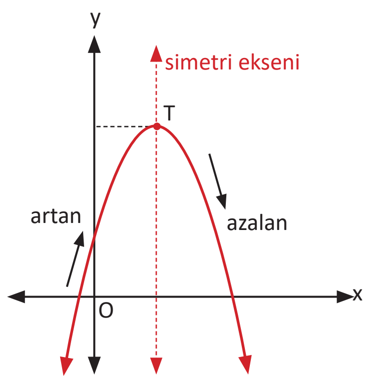


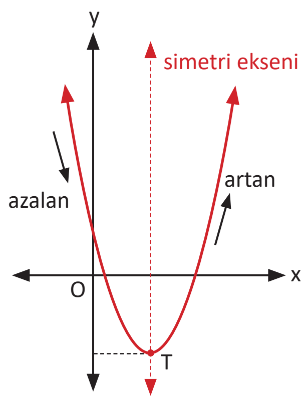
Yukarıda f: [–5, 7] → ℝ olacak şekilde y = f(x) fonksiyonu verilmiştir. Buna göre f(x) ≤ 0 eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

3.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikleri

3.2.1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyon Grafiğinin Çizimi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonlara **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar** denir.
Bu fonksiyonları sağlayan (x, y) nin analitik düzlemde oluşturduğu noktalar kümesine **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiği** denir.
Bu fonksiyonların grafiği **parabol**dür. Parabolde fonksiyonun artan olduğu aralıktan azalan olduğu aralığa geçtiği noktaya veya azalan olduğu aralıktan artan olduğu aralığa geçtiği noktaya **tepe noktası** denir. Tepe noktası **T** ile gösterilir. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere fonksiyon en küçük ya da en büyük değerini tepe noktasında alır.





$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğruya **simetri ekseni** denir.

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ Fonksiyonunun Grafiği

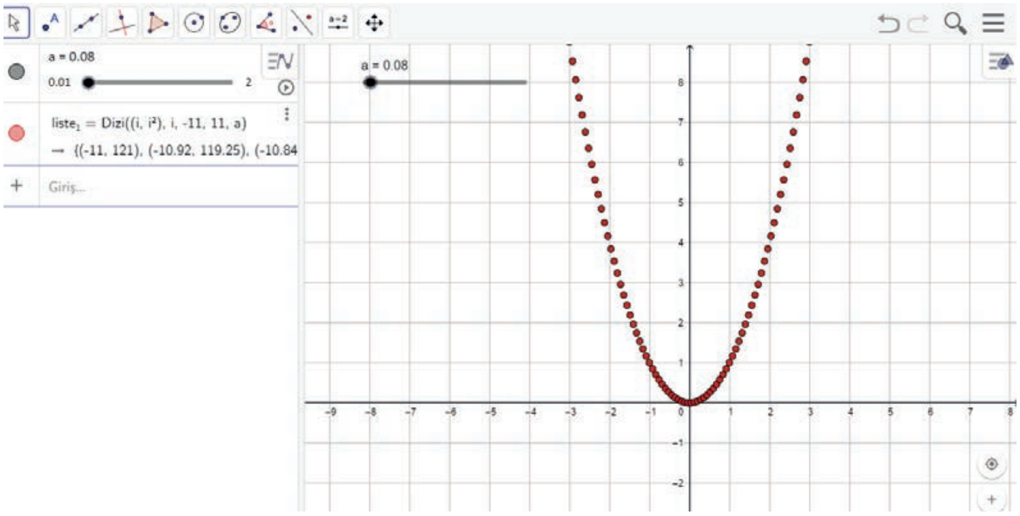
Grafik GeoGebra programı ile çizilip yorumlanacaktır.

2. Uygulama: $y = x^2$ Parabolü

a sürgüsünü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini 0.01, **maksimum** değerini 1, **artış** değerini 0.01 konumuna getiriniz.
Girişe dizi yazdıktan sonra oluşan satırdaki **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş**, **artış** yerlerine sırasıyla **(i, i²)**, **i**, **–10**, **10**, **a** yazınız.
Sürgüyü $a = 1$ konumuna getirdiğinizde $y = x^2$ parabolünün bazı noktaları belirir. Bu noktaların hepsini **cebir** penceresinde yazılı olan **liste1** de görebilirsiniz.



Sürgüyü a = 0.08 durumuna getirdiğinizde noktaların sıklaştığını ve $y = x^2$ parabolünün belirginleştiğini görebilirsiniz.



Parabollerin grafiğini çizerken parabolün denklemini sağlayan sonsuz noktayı analitik düzlemde göstermek mümkün değildir. El ile çizimlerde fonksiyonu sağlayan birkaç (x, y) noktası bulunur ve bu noktalar ardışık olarak uygun şekilde birleştirilerek çizim yapılır.

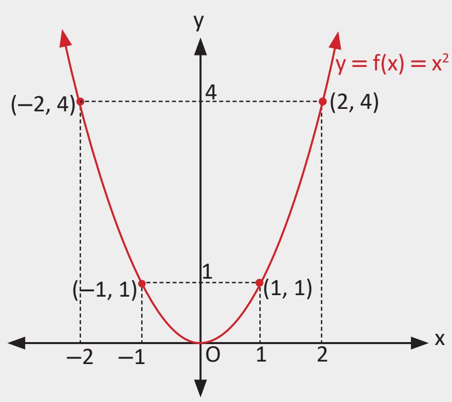
15. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$f(x) = x^2$ fonksiyonunda x in bazı değerlerine karşılık y nin aldığı değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

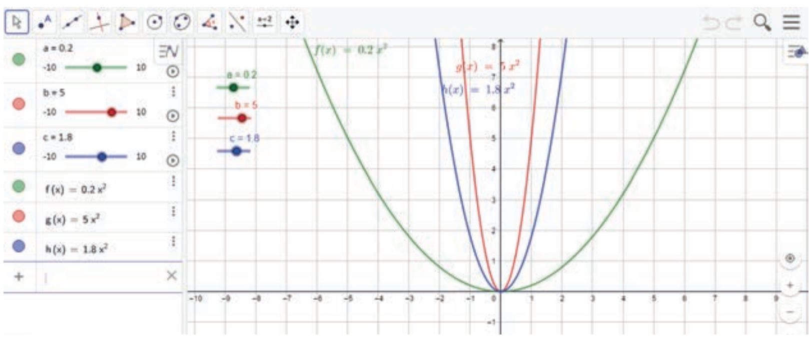
x	...	−2	−1	0	1	2	...
f(x)	...	4	1	0	1	4	...



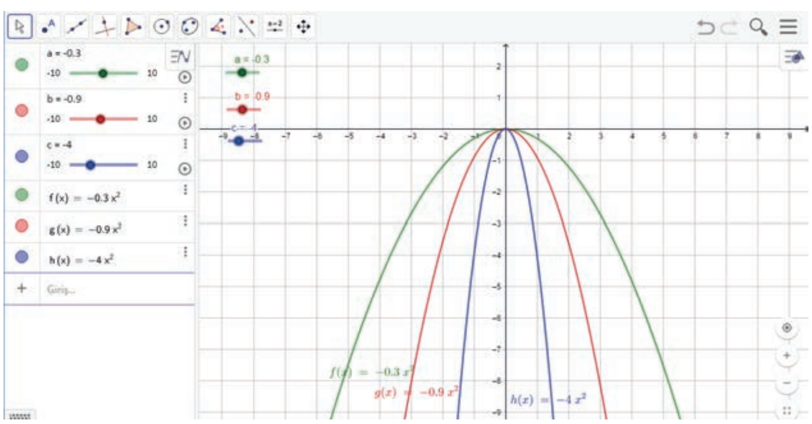
(x, f(x)) noktalarının analitik düzlemde birleştirilmesi ile yandaki parabol elde edilir.
Fonksiyon en küçük değerini x = 0 noktasında alır. Bu değer 0 dır. Böylece O(0, 0) noktası parabolün minimum noktası olur. Bu nokta aynı zamanda tepe noktasıdır.
x ve −x noktalarında fonksiyon aynı değeri aldığı için y ekseni parabolün simetri eksenidir.

3. Uygulama: $y = ax^2$ Parabollerinin Çizimi

a, b, c sürgülerini oluşturunuz. Sürgülerin **minimum** değerini **–5**, **maksimum** değerini **5**, **artış** değerini **0.1** durumuna getiriniz.
Girişe $\mathbf{ax^2}$ yazıp Enter tuşuna basınız.
Girişe $\mathbf{bx^2}$ yazıp Enter tuşuna basınız.
Girişe $\mathbf{cx^2}$ yazıp Enter tuşuna basınız.
Ekranda parabollerin grafikleri belirecektir.
Sürgüleri a = 0.2, b = 5, c = 1.8 konumuna getiriniz. Cebir penceresinde grafiklerin işaret ettiği fonksiyonlar $f(x) = 0.2x^2$, $g(x) = 5x^2$, $h(x) = 1.8x^2$ olarak görülecektir.



Sürgüleri a = –0.3, b = –0.9, c = –4 konumuna getiriniz. Cebir penceresinde grafiklerin işaret ettiği fonksiyonlar $f(x) = -0.3x^2$, $g(x) = -0.9x^2$, $h(x) = -4x^2$ olarak görülecektir.
$y = ax^2$ parabollerinde
a > 0 ise parabolün kolları yukarı,
a < 0 ise parabolün kolları aşağı doğrudur.
x^2 nin katsayısı mutlak değer olarak büyüdükçe parabolün kolları birbirine yaklaşır.
x^2 nin katsayısı mutlak değer olarak küçüldükçe parabolün kolları birbirinden uzaklaşır.
Bu parabollerde tepe noktası orijin, simetri ekseni y ekseni olur.
Sürgülere sağ tıklayarak açılan pencereden **canlandırma** seçeneği ile simülasyon oluşturabilirsiniz. Sürgülerin minimum, maksimum ve artış değerlerinin farklı durumları için gözlem yapabilirsiniz.



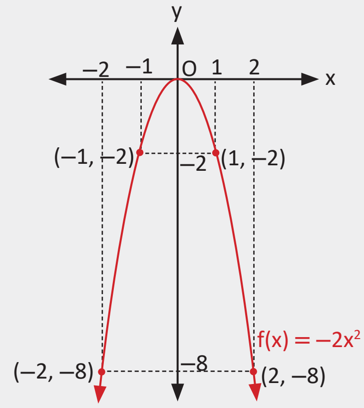
16. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

x	...	−2	−1	0	1	2	...
f(x)	...	−8	−2	0	−2	−8	...

(x, f(x)) noktalarının analitik düzlemde birleştirilmesi ile yandaki parabol elde edilir. Fonksiyon en büyük değerini x = 0 noktasında alır. Bu değer 0 dır. Böylece O(0, 0) noktası parabolün maksimum noktası olur.
x = 0 doğrusu parabolün simetri eksenidir.



$f(x) = ax^2 + bx + c$ Fonksiyonunun Grafiği

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonun grafiğini (parabol) çizebilmek için parabolün eksenleri kestiği noktalar ve parabolün tepe noktası bulunur. Bu noktalar ardışık birleştirilerek parabolün grafiği çizilir.

a > 0 ise parabolün kolları yukarı, a < 0 ise parabolün kolları aşağı doğrudur.

- **Parabolün eksenleri kestiği noktalar**
  $x = 0 \Rightarrow f(0) = c$ olduğundan parabol, y eksenini (0, c) noktasında keser.
  $y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ olur. Bu durumda
  $\Delta > 0$ ise parabol x eksenini farklı iki noktada keser.
  $\Delta < 0$ ise parabol x eksenini kesmez.
  $\Delta = 0$ ise parabol x eksenine teğettir.
- **Parabolün tepe noktası**
  $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının koordinatları T(r, k) olmak üzere
  $r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = f(r) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olur.

17. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasını bulunuz.

Çözüm

1. Yol

Fonksiyonun grafiğinin tepe noktasının apsisi $r = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ ve

ordinatı $k = f(r) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$ olur.

O hâlde tepe noktasının koordinatları T(r, k) = T(1, 2) olur.

2. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası aynı zamanda fonksiyonun maksimum veya minimum noktasıdır. f fonksiyonunda a = 1 > 0 olduğundan parabolün kolları yukarı doğru olup minimum noktası vardır. f fonksiyonunun alacağı minimum değer, ardından minimum noktası bulunur. Bunun için fonksiyonu tam kareye dönüştürmek gerekir.
$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ fonksiyonunun $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ için minimum değeri f(1) = 2, minimum noktası (1, 2) olur. Bu nokta aynı zamanda fonksiyonun grafiğinin tepe noktasıdır. Bu durumda T(1, 2) olur.

18. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^2 + 8x - 5$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasını bulunuz.

Çözüm

f fonksiyonunda $a = -4 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğru olup fonksiyonun maksimum noktası vardır.

$f(x) = -4\left(x^2 - 2x + \frac{5}{4}\right) = -4\left[(x-1)^2 + \frac{1}{4}\right] = -4(x-1)^2 - 1$ fonksiyonunun

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ için maksimum değeri $f(1) = -1$,

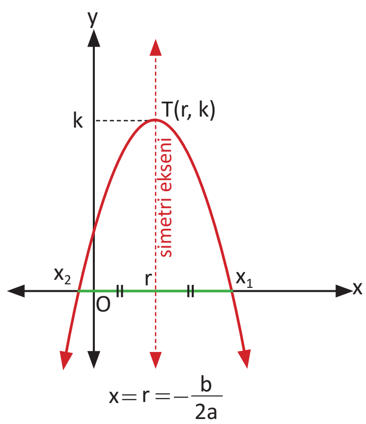
maksimum noktası $(1, -1)$ olur. Bu nokta aynı zamanda fonksiyonun grafiğinin tepe noktasıdır. Bu durumda $T(1, -1)$ olur.

Sonuç

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere fonksiyon $f(x) = a\cdot(x-r)^2 + k$ biçiminde ifade edilir.

$f(x) = a\cdot(x-r)^2 + k$ fonksiyonu için $x = r = -\frac{b}{2a}$ doğrusu fonksiyonun simetri eksenidir.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise tepe noktasının apsisi $r = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ olur.

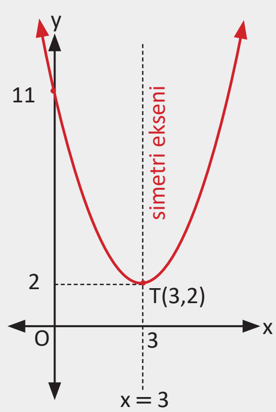


19. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 + 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

f fonksiyonu $f(x) = (x-3)^2 + 2$ olarak verildiğinden parabolün tepe noktası $T(3, 2)$ olur.
Simetri ekseni $x = r = 3$ doğrusudur.
$x = 0$ için parabolün y eksenini kestiği nokta
$y = (0-3)^2 + 2 \Rightarrow y = 11$ olur.
Analitik düzlemde parabolün tepe noktası ve y eksenini kestiği nokta işaretlenir.
Parabolün kolları yukarıya doğru ve parabol $x = 3$ doğrusuna göre simetrik olacaktır. İşaretlenen noktalar birleştirilerek yandaki parabol çizilir.



20. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Parabolün y eksenini kestiği nokta $x = 0$ için $y = -3$ olur.
Parabolün x eksenini kestiği noktalar $y = 0$ için $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$(2x - 1)(x + 3) = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$ ve $x_2 = -3$ olur.

Tepe noktasının koordinatları

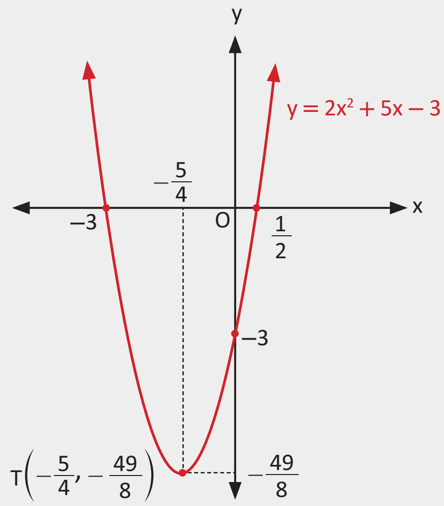
$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{5}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{4}$

$k = f\left(-\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 3$

$k = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} - 3 = \frac{25}{8} - \frac{37}{4} = -\frac{49}{8}$

$T\left(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ olur.

Parabolün tepe noktası ve eksenleri kestiği nokta birleştirilerek grafik yandaki gibi çizilir.



21. Örnek

Her $x \in \mathbb{R}$ için $y = -x^2 + x - 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Parabolün eksenleri kestiği noktalar ve tepe noktası aşağıdaki gibi bulunur.

$x = 0$ için $y = -2$

$y = 0$ için $-x^2 + x - 2 = 0$ denkleminde

$\Delta = b^2 - 4ac$

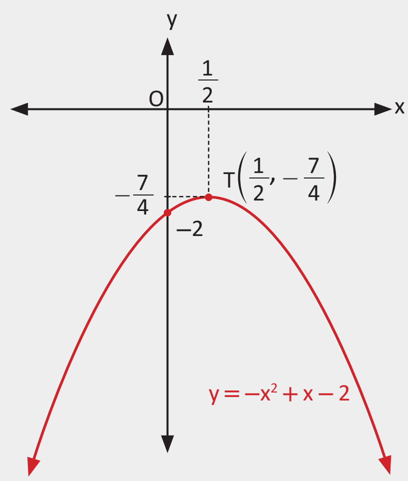
$= 1 - 4(-1) \cdot (-2) = -7 < 0$ olduğundan

reel kök yoktur. Dolayısıyla grafik x eksenini kesmez. Tepe noktası

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$

$k = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{4}$

$T\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ olarak bulunur.



Parabolün tepe noktası ve y eksenini kestiği nokta birleştirilerek grafik yandaki gibi çizilir.

Sıra Sizde

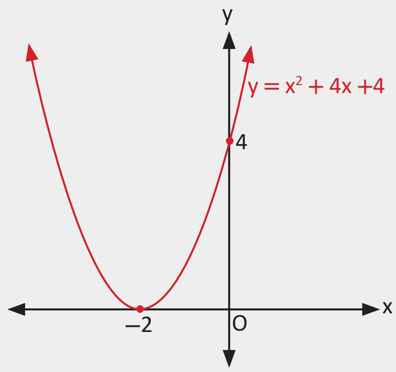
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

22. Örnek

f: ℝ →ℝ, $f(x) = x^2 + 4x + 4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

Fonksiyonun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar
$x = 0$ için $y = 4$ ve
$y = 0$ için $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)\cdot(x + 2) = 0$ olur.



Buradan $x_1 = -2$ ve $x_2 = -2$ olarak bulunur.
Fonksiyonun eşit (çakışık) iki kökü vardır.
Tepe noktası

$r = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$

$k = f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 0$

$T(-2, 0)$ olur.

Parabolün tepe noktası ve y eksenini kestiği nokta birleştirilerek yukarıdaki grafik elde edilir.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun çift katlı kökü varsa kökün olduğu nokta fonksiyonun grafiğinin tepe noktasıdır.

23. Örnek

f: ℝ →ℝ, $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz.

Çözüm

1. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$ olduğundan fonksiyonun en küçük değerini alması için $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ olmalıdır.
Bu durumda $f(1) = 3$ minimum değerdir.

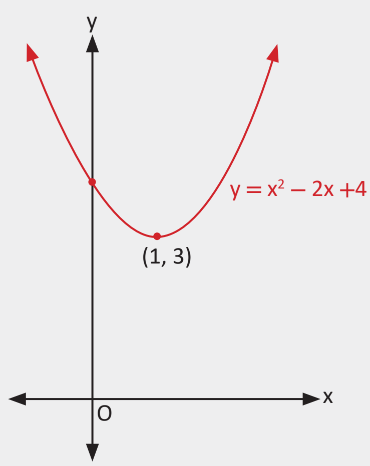
2. Yol

Parabolün kolları yukarı doğru olduğundan parabolün tepe noktası aynı zamanda minimum noktasıdır.

$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{-2}{2} = 1$ olur. Buradan

$k = f(r) \Rightarrow k = f(1) = 1^2 - 2.1 + 4 = 3$

en küçük değer olarak bulunur.
Yandaki grafikte fonksiyonun minimum değeri ve minimum noktası görülmektedir.



24. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3m-1)x^2 - 4mx + 2$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasının apsisi 2 olduğuna göre fonksiyonun minimum değerini bulunuz.

Çözüm

Tepe noktasının apsisi $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4m}{2\cdot(3m-1)} = 2$

$m = 3m - 1 \Rightarrow 3m - m = 1 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ olur.

Minimum değer, fonksiyonda $m = \frac{1}{2}$ ve $x = 2$ yazıldığında

$k = f(r) = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 2 = 0$ olarak bulunur.

25. Örnek

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m-1)x^2 - (2m-1)x - 1$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre m nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

Tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre grafik x eksenine teğettir.

Bu durumda $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ olur.

$(-(2m-1))^2 - 4(m-1)\cdot(-1) = 0$

$4m^2 - 4m + 1 + 4m - 4 = 0$

$4m^2 - 3 = 0$ olur. Buradan

$m^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ veya $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

Parabolün Denklemini Yazma

Parabolün grafiğine bağlı olarak denklem üç farklı duruma göre yazılabilir.

1. Biri y ekseni üzerinde olmak üzere parabolün herhangi üç noktası $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda yerine yazılarak a, b, c katsayıları bulunur ve parabol denklemi elde edilir.
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Bu durumda parabol denklemi
   $y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ şeklinde yazılır.
   $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ noktaları dışında parabol üzerinde verilen üçüncü bir nokta yardımıyla a değeri bulunur ve parabol denklemi elde edilir.
3. Tepe noktasının koordinatları T(r, k) olsun. Parabolün üzerinde tepe noktası dışında ikinci bir nokta bilindiğinde bu noktalar $y = a\cdot(x - r)^2 + k$ denkleminde yerine yazılarak a değeri bulunur ve parabol denklemi elde edilir.

26. Örnek

Tepe noktası T(2, –5) olan ve A(1, –4) noktasından geçen parabolün denklemini yazınız.

Çözüm

T (r, k) = T(2, –5) ve A (x, y) = A(1, –4) noktaları
$y = a\cdot(x-r)^2 + k$ denkleminde yerine yazıldığında
$-4 = a\cdot(1-2)^2 - 5 \Rightarrow -4 = a\cdot(-1)^2 - 5$
$\Rightarrow a - 5 = -4 \Rightarrow a = 1$ olur. Buradan parabol denklemi
$y = 1\cdot(x-2)^2 - 5 \quad \Rightarrow y = (x-2)^2 - 5$
$\Rightarrow y = x^2 - 4x - 1$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Tepe noktası T(1, –4) olan ve (0, –5) noktasından geçen parabolün denklemini yazınız.

27. Örnek

x eksenini (–1, 0), (4, 0) noktalarında kesen ve (0, 4) noktasından geçen parabolün denklemini yazınız.

Çözüm

x eksenini kestiği noktaların apsisleri x_1 ve x_2 olan parabolün denklemi
$y = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ olur.
–1 ve 4 noktaları parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisleridir.
Bu durumda parabolün denklemi $y = a\cdot(x+1)\cdot(x-4)$ şeklinde olur.
(0, 4) noktası parabol üzerinde olduğundan denklemi sağlar.
$4 = a\cdot(0+1)\cdot(0-4) \Rightarrow 4 = -4a \Rightarrow a = -1$ olarak bulunur.
Parabolün denklemi
$y = -1\cdot(x+1)\cdot(x-4) \Rightarrow y = -x^2 + 3x + 4$ olur.

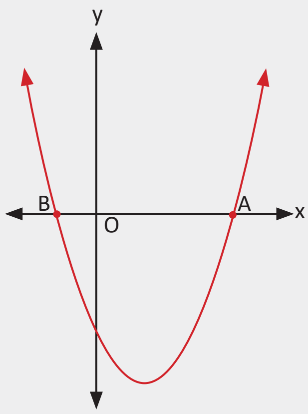
28. Örnek

(–2, –3), (0, 2) ve (3, 2) noktalarından geçen parabolün denklemini yazınız.

Çözüm

Verilen noktalar $y = ax^2 + bx + c$ parabol denkleminde yerine yazıldığında
(0, 2) noktası için $2 = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow c = 2$ olur. Buradan $y = ax^2 + bx + 2$ olur.
(3, 2) noktası için $2 = a.3^2 + b.3 + 2 = 9a + 3b + 2 \Rightarrow 9a + 3b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$ olur.
(–2, –3) noktası için $-3 = a.(-2)^2 + b.(-2) + 2 = 4a - 2b + 2 \Rightarrow 4a - 2b = -5$ olur.
$3a + b = 0$
$4a - 2b = -5$ denklem sistemi çözüldüğünde $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ olur.
Buna göre parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ olur.

29. Örnek



Yandaki şekilde $y = x^2 - 2x - m + 4$ parabolünün grafiği verilmiştir. $|AO| = 3|OB|$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

Çözüm

Grafikte $|AO| = 3|OB|$ olduğundan

$|OB| = t$ ise $|AO| = 3t$, $A(3t, 0)$ olur.

B noktası x ekseninin negatif tarafında olduğundan $B(-t, 0)$ olur.

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ olduğundan

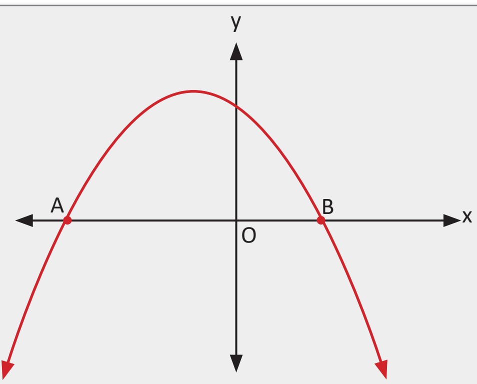
$3t + (-t) = -\frac{-2}{1} = 2 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$ ve $A(3, 0)$, $B(-1, 0)$ olur.

$A(3, 0)$ noktası $y = x^2 - 2x - m + 4$ denkleminde yerine yazıldığında

$0 = 3^2 - 2 \cdot 3 - m + 4 \Rightarrow m = 7$ olarak bulunur.

Ayrıca $B(-1, 0)$ noktası parabol denkleminde yerine yazılarak m değeri elde edilebilir.

30. Örnek



Yandaki şekilde $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2m$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $|AB| = 4$ birim olduğuna göre m değerini bulunuz.

Çözüm

Grafikte A noktasının koordinatları $A(t, 0)$ olsun.

$|AB| = 4$ birim olduğuna göre $B(t + 4, 0)$ olur.

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ olur.

$t + t + 4 = -\frac{-1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 2t + 4 = -2 \Rightarrow t = -3$ olur. Buradan

$A(-3, 0)$ ve $B(1, 0)$ noktaları elde edilir.

Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -3 \cdot 1 = \frac{2m}{-\frac{1}{2}}$

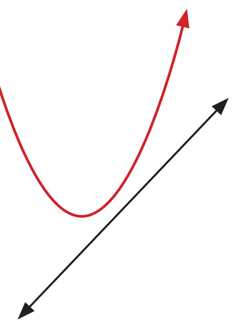
$\Rightarrow 3 = 4m \Rightarrow m = \frac{3}{4}$ olur.

Bir Doğru ile Bir Parabolün Durumu

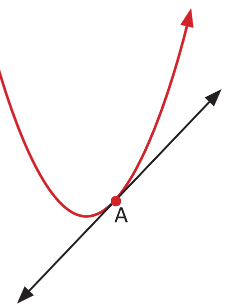
$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusunun durumları incelenirken denklemlerin ortak çözümü yapılır. Bunun için her iki denklemde y değerleri birbirine eşitlenir.
$ax^2 + bx + c = mx + n \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$
İki denklemin ortak çözümüyle ulaşılan denkleme **ortak çözüm denklemi** denir.

Bulunan ortak çözüm denkleminin diskriminantı (Δ) için

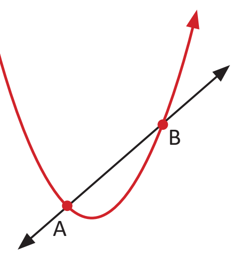
1. $\Delta < 0$ ise
Ortak çözüm denkleminin kökü yoktur.
O hâlde **parabol ile doğru kesişmez.**



2. $\Delta = 0$ ise
Ortak çözüm denkleminin birbirine eşit iki kökü vardır.
O hâlde **doğru**, **parabole teğettir**.



3. $\Delta > 0$ ise
Ortak çözüm denkleminin farklı iki reel kökü vardır.
O hâlde **parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.**



31. Örnek

$y = x^2 + x$ parabolü ile $y = 3x + n$ doğrusu kesişmediğine göre n nin en geniş değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$x^2 + x = 3x + n \Rightarrow x^2 - 2x - n = 0$ ortak çözüm denklemidir.
Doğrular kesişmediğinden ortak çözüm denkleminin kökü yoktur. $\Delta < 0$ olmalıdır.
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-n) < 0$
$4 + 4n < 0 \Rightarrow 4n < -4 \Rightarrow n < -1$ olur.
En geniş değer aralığı $(-\infty, -1)$ olur.

32. Örnek

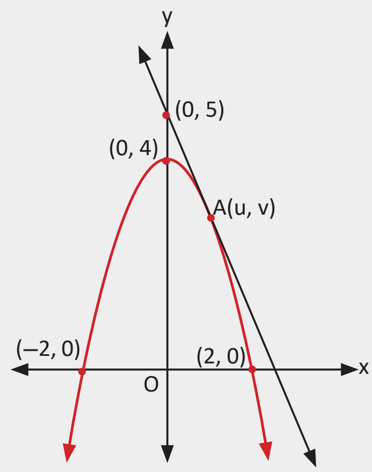
$ax + y = 1$ doğrusu $y = 2x^2 + x + 3$ parabolüne teğet olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

Çözüm

$ax + y = 1 \Rightarrow y = 1 - ax$ şeklinde yazılır. Parabol ile doğrunun ortak çözüm denklemi
$2x^2 + x + 3 = 1 - ax \Rightarrow 2x^2 + x + ax + 2 = 2x^2 + (1 + a)x + 2 = 0$ olarak bulunur.
Doğru, parabole teğet olduğundan bu denklemde $\Delta = 0$ olmalıdır.
$\Delta = (1 + a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow (1 + a)^2 = 16$
$\Rightarrow 1 + a = 4$ veya $1 + a = -4$
$\Rightarrow a = 3$ veya $a = -5$
a nın alabileceği değerler toplamı $-5 + 3 = -2$ olur.

33. Örnek

Yandaki şekilde parabol x eksenini $(-2, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarında, y eksenini $(0, 4)$ noktasında kesmektedir. y eksenini $(0, 5)$ noktasında kesen doğrunun parabole değdiği nokta $A(u, v)$ olduğuna göre $u + v$ değerini bulunuz.



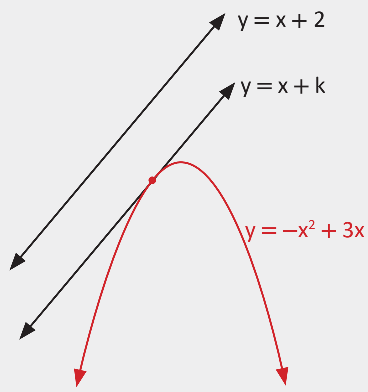
Çözüm

Parabolün denklemi $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ şeklindedir. Buradan
$y = a \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 2) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$ ve parabol $(0, 4)$ noktasından geçtiği için
$4 = a \cdot 2 \cdot (-2) \Rightarrow a = -1$ olur. Buradan
$y = -(x^2 - 4) = -x^2 + 4$ olarak bulunur.
Eğimi m ve y eksenini kestiği noktanın ordinatı 5 olan doğru denklemi
$y = mx + 5$ olarak yazılır.
Ortak çözüm denklemi $-x^2 + 4 = mx + 5$
$x^2 + mx + 1 = 0$ olarak bulunur. Bu denklemde doğru, parabole teğet olduğundan
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ olmalıdır.
$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = 2$ veya $m = -2$ olur. Doğrunun eğim açısı geniş açı olduğundan $m = -2$ olur. Ortak çözüm denkleminde $m = -2$ yazıldığında
$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ olur. Bu değer, doğrunun parabole değdiği A noktasının apsisidir. Buna göre $u = 1$ olur.
Bu değer, parabol veya doğru denkleminde yerine yazıldığında
$y = -2 \cdot 1 + 5 = 3$, $v = 3$ elde edilir. Buradan $u + v = 4$ olur.

34. Örnek

$f(x) = -x^2 + 3x$ fonksiyonunun grafiğinin $x - y = -2$ doğrusuna en yakın noktasını bulunuz.

Çözüm



Doğru denklemi düzenlendiğinde $y = x + 2$ olur.
$y = x + 2$ doğrusuna paralel ve fonksiyonun grafiğine (parabol) teğet olan doğru çizilir.
Bu doğrunun parabole değdiği nokta $y = x + 2$ doğrusuna en yakın olan noktadır.
$y = x + 2$ doğrusuna paralel ve parabole teğet olan doğru $y = x + k$ olsun. Bu doğru denklemi ile parabol denklemi ortak çözülür.
$-x^2 + 3x = x + k \Rightarrow x^2 - 2x + k = 0$
Doğru, parabole teğet olduğu için
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0$ olmalıdır.
Buradan $4 - 4k = 0 \Rightarrow k = 1$ olur. Ortak çözüm denkleminde $k = 1$ yazıldığında
$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ elde edilir.
$x = 1$ için $y = 1 + 1 = 2$ olur. İstenen nokta $(1, 2)$ olarak bulunur.

35. Örnek

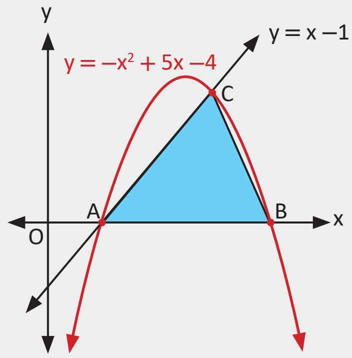
$y = x^2 + ax + 2$ parabolüne orijinden çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre a nın pozitif değerini bulunuz.

Çözüm

Orijinden geçen eğimi m olan teğetlerden birinin denklemi $y = mx$ olsun.
$y = mx$ doğru denklemi ile parabolün denkleminin ortak çözümü yapılır.
$x^2 + ax + 2 = mx \Rightarrow x^2 + (a - m)x + 2 = 0$
Bu denklemde $\Delta = (a - m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 0$ olmalıdır.
$(a - m)^2 - 8 = 0 \Rightarrow a - m = 2\sqrt{2}$ veya $a - m = -2\sqrt{2}$ olur. m nin iki değeri vardır.
Teğetlerden birinin eğimi m_1, diğerinin eğimi m_2 olsun. Buradan
$m_1 = a - 2\sqrt{2}$ ve $m_2 = a + 2\sqrt{2}$ olarak bulunur.
Teğetler birbirine dik olduğundan eğimleri çarpımı $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.
$(a - 2\sqrt{2}) \cdot (a + 2\sqrt{2}) = -1 \Rightarrow a^2 - 8 = -1 \Rightarrow a^2 = 7$
$\Rightarrow a = \sqrt{7}$ veya $a = -\sqrt{7}$ olur. Buradan
a nın pozitif değeri $\sqrt{7}$ olur.

36. Örnek

Şekildeki $y = -x^2 + 5x - 4$ fonksiyonunun grafiği x eksenini A ve B noktalarında kesmekte, $y = x - 1$ doğrusu A ve C noktalarından geçmektedir. ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



Çözüm

Parabolün x eksenini kestiği noktalar

$y = 0$ için $-x^2 + 5x - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 4)\cdot(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ veya $x = 1$ olarak bulunur.

$A(1, 0)$ ve $B(4, 0)$ ve $|AB| = 3$ birim olur.

Parabol ile doğrunun kesişim noktası bulunur.

$-x^2 + 5x - 4 = x - 1 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$

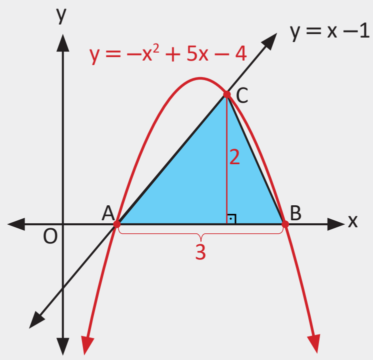
$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)\cdot(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = 1$ olur. Bu durumda

$A(1, 0)$ ve $C(3, k)$ olur.

$C(3, k)$ noktası $y = x - 1$ doğrusu üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlar ve $k = 3 - 1 = 2$ olarak bulunur.

Buradan $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{3\cdot 2}{2} = 3$ birimkare olur.



37. Örnek

$y = x + 3$ doğrusu ile $y = x^2 + 1$ parabolünün birbirine göre durumunu inceleyerek kesim noktalarını bulunuz.

Çözüm

$x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ ortak çözüm denkleminde $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 > 0$ olduğundan parabol ile doğru iki noktada kesişir.

$(x + 1)\cdot(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 2$ olur.

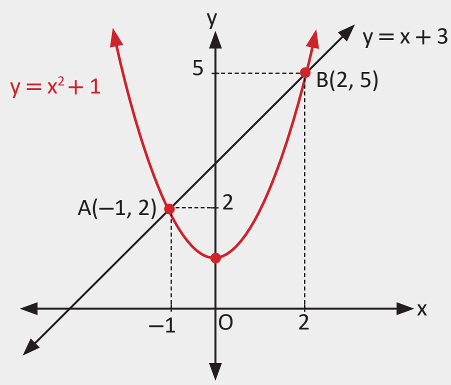
Bulunan bu değerler doğru veya parabolün denkleminde yerine yazılır.

$x = -1$ için $y = -1 + 3 = 2$

$x = 2$ için $y = 2 + 3 = 5$ elde edilir.

Buna göre doğru ile parabolün kesim noktaları $A(-1, 2)$ ve $B(2, 5)$ olur.

Yandaki grafikte görüldüğü gibi doğru, parabolü iki farklı noktada keser.

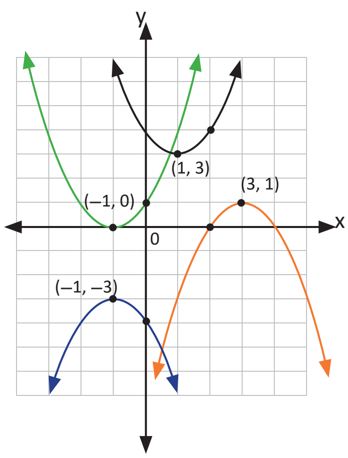


Alıştırmalar

1. $y = 3x^2 - 5x + 2$ fonksiyonunun alabileceği <u>en küçük</u> değeri bulunuz.

2. (0, 3), (–1, 4) ve (2, 19) noktalarından geçen parabol denklemini bulunuz.

3.



Birimkarelerden oluşan analitik düzlemde grafikleri verilen parabolleri aşağıdaki denklemlerle eşleştiriniz.

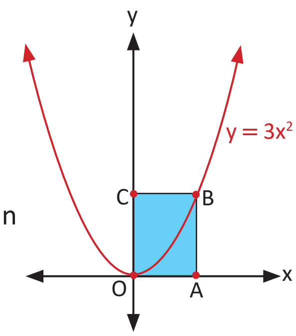
$f(x) = (x - 1)^2 + 3$ $\quad$ $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$

$h(x) = -(x - 3)^2 + 1$ $\quad$ $t(x) = (x + 1)^2$

4. $y = -4x + k$ doğrusu $y = x^2 + 2x + 14$ parabolüne teğet olduğuna göre k değerini bulunuz.

5. $y = 2x - 3$ doğrusu ile $y = -x^2 + 4x + 5$ parabolü A ve B noktalarında kesişiyor. Bu iki nokta arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

6. Yandaki şekilde $y = 3x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. OABC bir dikdörtgen ve $|AB| = 2|AO|$ olduğuna göre OABC dikdörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



7. $y = x^2 - 2mx + m + 1$ parabolünün tepe noktası $y = 2x - 5$ doğrusu üzerinde olduğuna göre m nin pozitif değerini bulunuz.

8.



Su kemerleri, geçmiş yıllarda suyu bir bölgeden başka bir bölgeye aktarmak için yapılmış su yollarıdır. Yukarıdaki görselde görüldüğü gibi su kemerleri genelde parabol şeklinde inşa edilmiştir.
Bir su kemerinin tepe noktasının yerden yüksekliği 12 metre, ayaklarının iç kısımları arasındaki mesafe 8 metredir. Buna göre yukarıdaki gibi modellenen parabolün denklemini simetri ekseni y olacak şekilde yazınız.

3.2.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlarla Modellenebilen Problemler

38. Örnek

Bir kırtasiyeci x TL ye aldığı ürünü y TL ye satmaktadır. x ile y arasında $y = -x^2 + 9x + 36$ bağıntısı olduğuna göre kırtasiyecinin satıştan en fazla kaç TL kâr elde edeceğini bulunuz.

Çözüm

Satıştan elde edilen kâr fonksiyonu k(x) olsun. Kâr $y - x$ olduğundan

$k(x) = y - x = -x^2 + 9x + 36 - x = -x^2 + 8x + 36$ olur.

Ürünün alış fiyatı $x = r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{8}{-2} = 4$ TL olduğunda

kırtasiyecinin maksimum kârı $k(4) = -(4)^2 + 8.(4) + 36 = 52$ TL olarak bulunur.

39. Örnek

Kenar uzunlukları (10–x) birim ve 5x birim olan dikdörtgenin alanının en fazla kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm

Alan fonksiyonu a(x) olursa

$a(x) = (10 - x)\cdot 5x = 50x - 5x^2$ olur.

Dikdörtgenin alanı fonksiyonun tepe noktasının apsisinde maksimum değerine ulaşır.

O hâlde sonuç $r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{50}{2\cdot(-5)} = 5$ olduğundan

$a(5) = 50x - 5x^2 = 50\cdot 5 - 5\cdot 5^2 = 250 - 125 = 125$ birimkare olur.

40. Örnek

Yerden V_0 ilk hızıyla g yerçekimi ivmesi altında dikey fırlatılan bir topun x saniye sonra yerden yüksekliği metre cinsinden $f(x) = V_0\cdot x - \frac{1}{2}\cdot g\cdot x^2$ şeklinde ifade ediliyor.

$V_0 = 40$ m/sn. ve

$g \approx 10$ m/sn.^{2} olduğuna göre

a) Topun 5 saniyede kaç metre yükseğe çıkacağını,

b) Topun çıkabileceği maksimum yüksekliğin kaç birim olacağını bulunuz.

Çözüm

a) Top 5 saniyede $f(5) = 40\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 25 = 200 - 125 = 75$ m yükseğe çıkar.

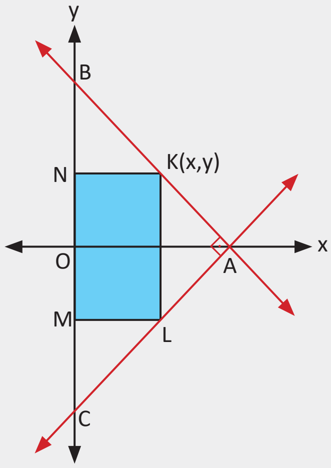
b) $f(x) = 40\cdot x - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot x^2 = 40x - 5x^2$ fonksiyonunun en büyük değeri maksimum yüksekliği verir.

$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{40}{2\cdot(-5)} = 4$ olduğundan top maksimum yüksekliğe 4 saniyede çıkar.

Maksimum yükseklik $f(4) = 40\cdot 4 - 5\cdot 16 = 80$ m olur.

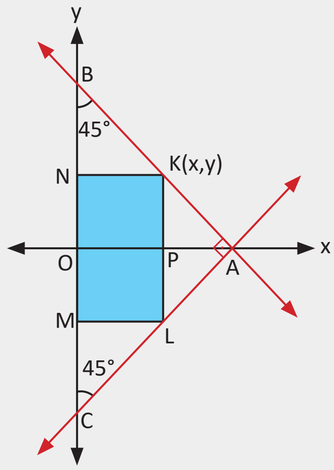
41. Örnek

ABC ikizkenar dik üçgen, [AB]⊥[AC] ve KLMN dikdörtgendir. K, L noktaları sırasıyla [AB], [AC] kenarları üzerinde ve $|BC| = 4$ birim olduğuna göre
a) Dikdörtgenin alanını x cinsinden bulunuz.
b) Bulduğunuz alan fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
c) Dikdörtgenin alanının maksimum olduğundaki x değerini bulunuz.



Çözüm

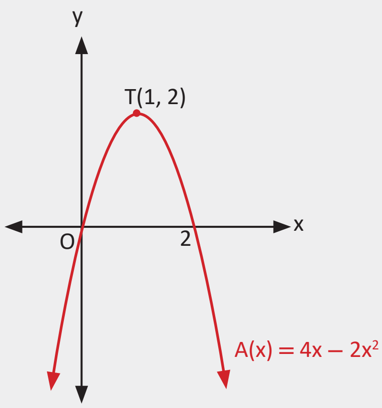
a) ABC ikizkenar dik üçgen olduğundan
$m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{ACB}) = 45°$ olur.
$|BC| = 4$ birim olduğundan $|BO| = |OA| = |OC| = 2$ birim olur. Buna göre
A ve B noktalarının koordinatları A(2, 0) ve B(0, 2) olur.
AB doğrusunun denklemi $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ olur. Buradan
$x + y = 2$ ise $y = 2 - x$ olur. Buradaki y değeri $|KP|$ olur.
K ve L noktaları x eksenine göre simetrik olduğundan
$|KL| = 2 \cdot |KP| = 4 - 2x$ olur.
Dikdörtgenin alanı $A(x) = x \cdot (4 - 2x) = 4x - 2x^2$ birimkare olarak bulunur.



b) $A(x) = 4x - 2x^2$ fonksiyonunun grafiği
y eksenini $x = 0$ için $y = 0$ noktasında,
x eksenini $y = 0$ için
$4x - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x \cdot (2 - x) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında keser.

$$r = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

$A(1) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = 2$ değerleri için tepe noktasının koordinatları T(1, 2) olarak bulunur. Buna göre parabolün grafiği yandaki gibi olur.



c) b şıkkında bulunan r değeri fonksiyonun en büyük değerini aldığı noktanın apsisidir. r nin aldığı bu değer, dikdörtgenin alanının maksimum olması durumunda x in değeridir. Buradan $x = 1$ olur.

42. Örnek

Ahmet Bey ve eşi, lösemi hastalığı ile ilgili farkındalık oluşturmak için A şehrinden B şehrine yürüyecektir. Yürüyüşten x gün sonra B şehrine kalan mesafe km cinsinden $f(x) = 300 - 5x - x^2$ şeklinde ifade edilmektedir.

a) A ile B şehirleri arasındaki uzaklığın kaç km olduğunu,
b) 3 günün sonunda katedecekleri mesafeyi,
c) Yürüyüşün kaç gün süreceğini bulunuz.

Çözüm

a) $x = 0$ olduğunda A ile B şehirleri arasındaki mesafe $f(0) = 300 - 5 \cdot 0 - 0^2 = 300$ km olur.
b) $x = 3$ gün sonunda B şehrine kalan mesafe $f(3) = 300 - 15 - 9 = 276$ km olarak bulunur.
Gidilen yol $300 - 276 = 24$ km olur.
c) Kalan mesafenin sıfır km olması durumunda B şehrine varılmış olur.
O hâlde $f(x) = 0$ için x değeri bulunmalıdır.

$300 - 5x - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$
$\Rightarrow (x - 15) \cdot (x + 20) = 0$
$\Rightarrow x = 15$ veya $x = -20$ olur.

Zaman negatif olamayacağı için yürüyüş 15 gün sürer.

Sıra Sizde

Çevre uzunluğu 80 m olan dikdörtgenin alanının en çok kaç metrekare olduğunu bulunuz.

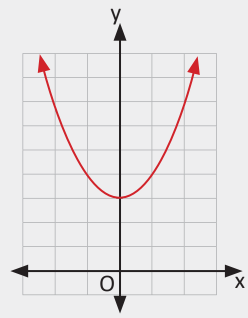
3.3. Fonksiyonların Dönüşümleri

Tek ve Çift Fonksiyonların Grafiklerinin Simetri Özellikleri

Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir.
Tek fonksiyonların grafikleri orijine göre simetriktir.

43. Örnek

Yandaki grafiğin tepe noktası y ekseni üzerindedir. Bu grafiğin ait olduğu fonksiyonun tek ya da çift olduğunu belirleyiniz.



Çözüm

Grafik y eksenine göre simetrik olduğundan fonksiyon çift fonksiyondur.

4. Uygulama: Bir Fonksiyonun Orijine Göre Simetrik Olup Olmadığını Gösterme



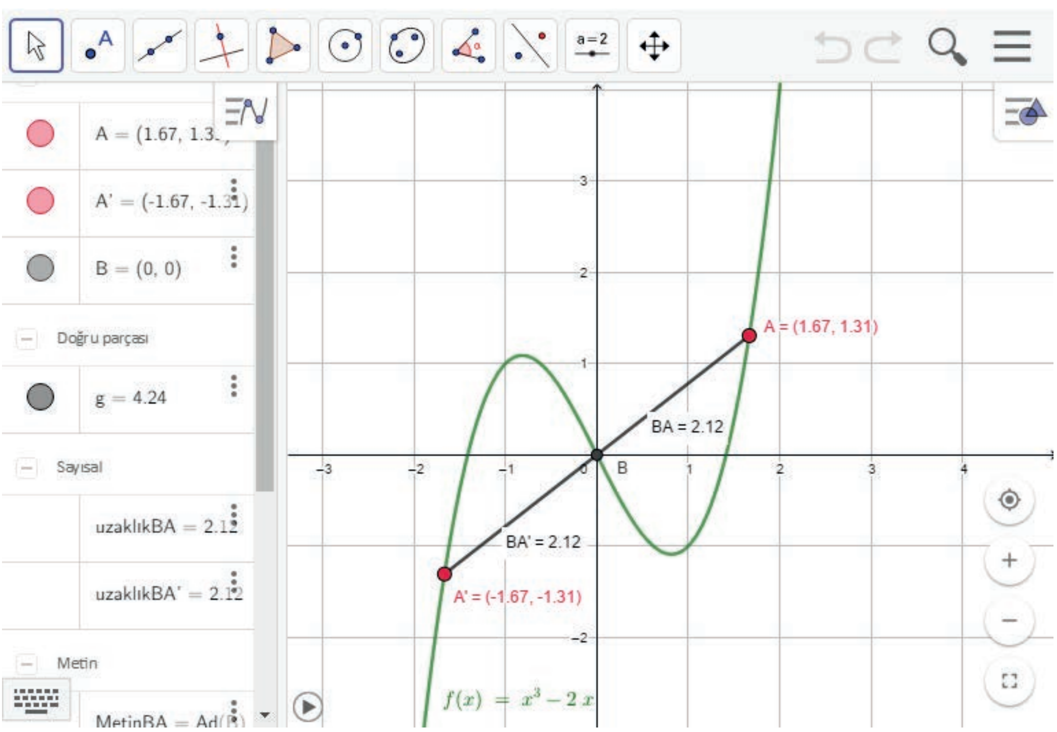
Nokta

Bu uygulamada fonksiyonun grafiği üzerinden orijine göre simetrik olduğu gösterilecektir. **Girişe x^3-2x** yazarak Enter tuşuna basınız. **Nokta** ikonuna tıkladıktan sonra grafiğin üzerinde bir yere tıklayarak A noktasını oluşturunuz. **Giriş** bölümüne **yansıt** yazdıktan sonra oluşan satırda **nesne**, **nokta** yerlerine sırasıyla **A**, **(0, 0)** yazınız ve Enter tuşuna basınız.

A noktasının orijine göre simetriği olan A' noktası grafiğin diğer tarafında belirecektir. İmleç ile A noktasını sürüklediğinizde A' nın grafik üzerinde orijine göre simetrik bir şekilde hareket ettiğini göreceksiniz. Orijine göre simetrik olan iki noktanın koordinatları arasındaki ilişkiyi görmeye çalışınız.

A ve A' noktalarının orijine göre simetrik olduğunu daha iyi görebilmek için **doğru parçası** ikonuna, ardından A ve A' noktalarına tıklayarak doğru parçasını çiziniz. Doğru parçasının orijinden geçtiğine dikkat ediniz.

A noktasına tıklayıp noktayı sürükleyerek grafik üzerinde hareket ettiriniz. Doğru parçası daima orijinden geçecektir. O hâlde $y = x^3 - 2x$ fonksiyonunun orijine göre simetrik olduğu görülür.



A(a, b) noktasının orjine göre simetriği A'(−a, −b) noktasıdır.

Sonuç

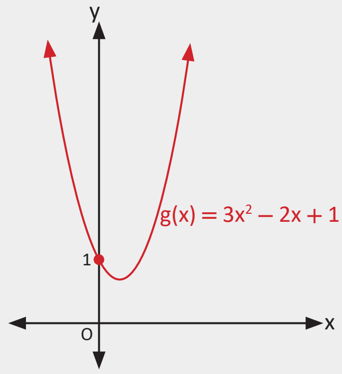
Bir fonksiyon tek fonksiyon ise orijine göre simetriktir.
Bir fonksiyon orijine göre simetrik ise tek fonksiyondur.

44. Örnek

$g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun tek ya da çift fonksiyon olduğunu belirleyiniz.

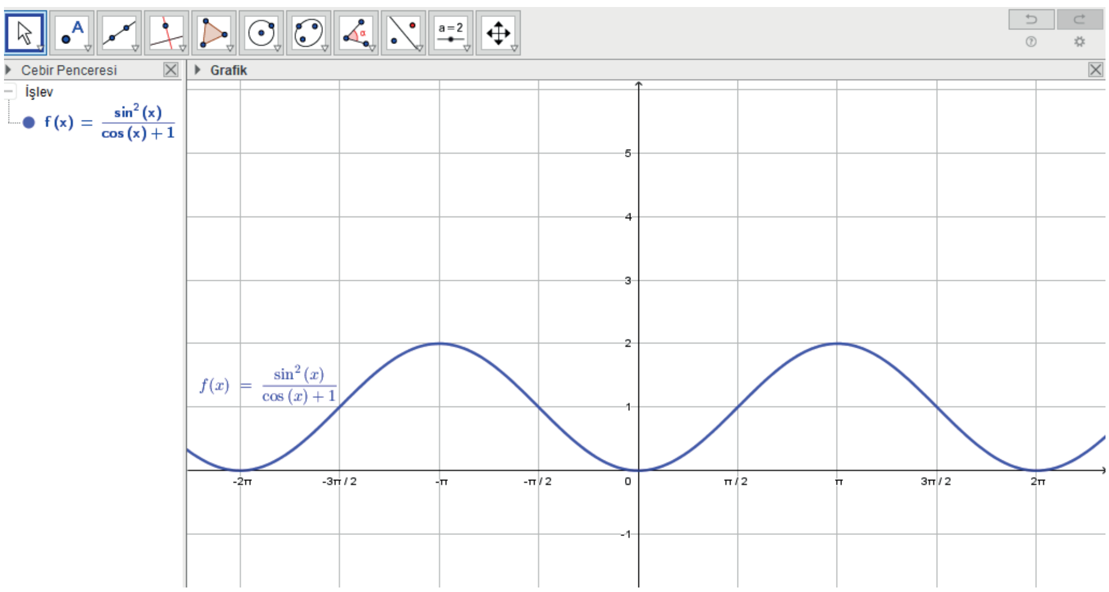
Çözüm

g fonksiyonu ne tek ne de çift fonksiyondur.
Bu fonksiyonun grafiği yandaki şekilde görüldüğü gibi y eksenine ya da orijine göre simetrik değildir.



5. Uygulama: $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$ Fonksiyonunun Tek veya Çift Fonksiyon Olduğunu Belirleme

Girişe sin²x/cosx+1 yazarak Enter tuşuna basınız. Fonksiyonun grafiği ekranda görülecektir.



Görüldüğü gibi fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir. O hâlde $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$ fonksiyonu **çift fonksiyon**dur.

Sıra Sizde

$h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun grafiğini GeoGebra programında çizerek tek ya da çift olduğunu belirleyiniz.

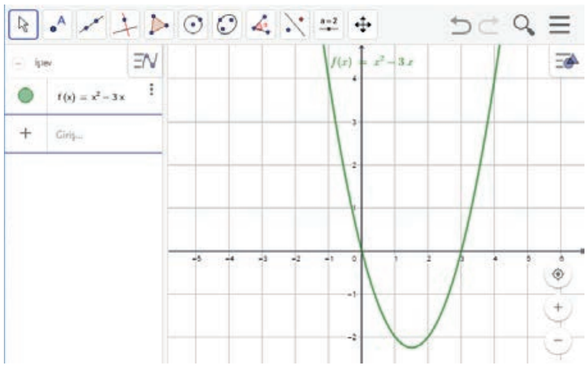
Fonksiyonların Dönüşümleri

f(x) verildiğinde f(x) + b, f(x − a), k·f(x), f(k·x), −f(x), f(−x) dönüşümleri GeoGebra yardımı ile çizilecektir.

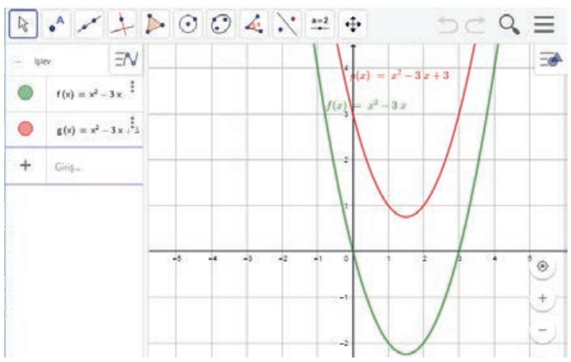
6. Uygulama: y = f(x) + b Dönüşümü

$f(x) = x^2 - 3x$ olsun.

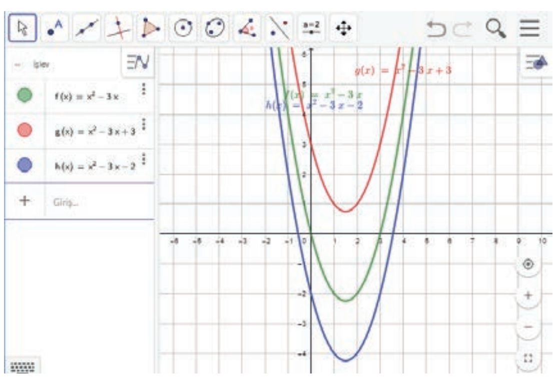
Girişe x²-3x yazarak Enter tuşuna basınız. Fonksiyonun grafiği f(x) olarak **cebir** penceresinde görülecektir.



Girişe f+3 yazarak Enter tuşuna basınız. 3 birim yukarı ötelenen g(x) fonksiyonunu elde ediniz.



Girişe f-2 yazarak 2 birim aşağı ötelenen h(x) fonksiyonunu elde ediniz.

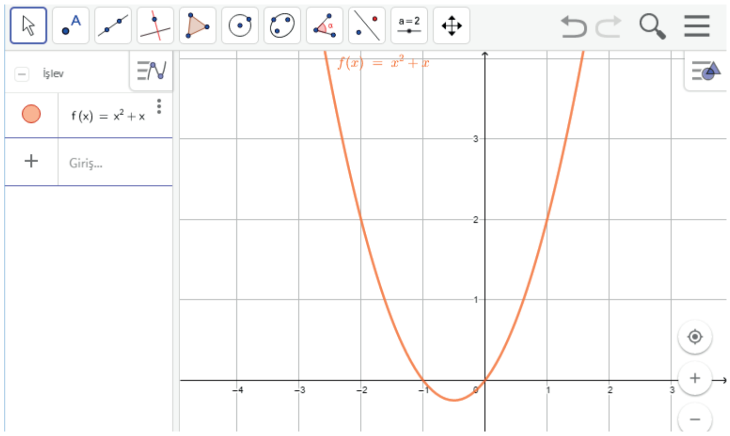


Sonuç

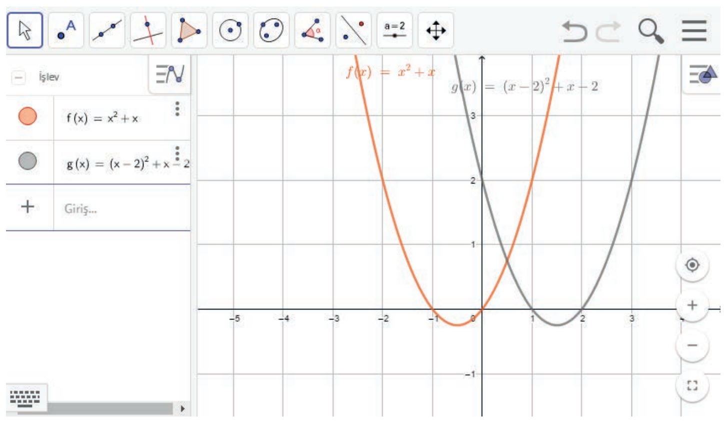
f(x) + b fonksiyonunun grafiğinde b > 0 ise f(x) fonksiyonunun grafiği b birim yukarı, b < 0 ise f(x) fonksiyonunun grafiği |b| birim aşağı ötelenerek y = f(x) + b fonksiyonunun grafiği elde edilir.

7. Uygulama: y = f(x – a) Dönüşümü

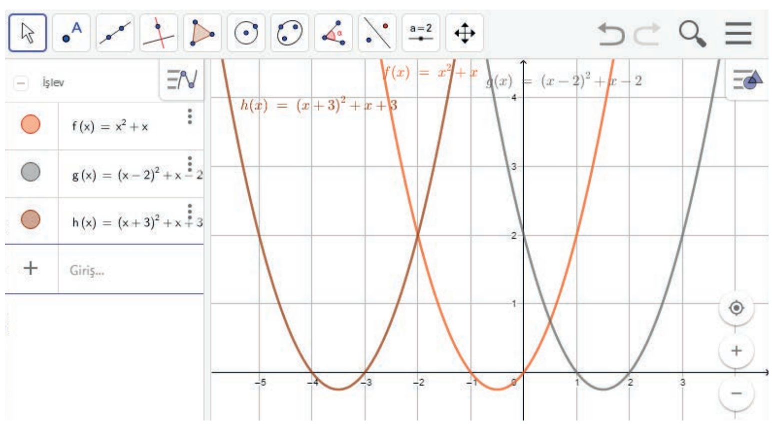
Girişe x^2+x yazarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.



Girişe f(x–2) yazarak 2 birim sağa ötelenen g(x) fonksiyonunu elde ediniz.



Girişe f(x+3) yazarak 3 birim sola ötelenen h(x) fonksiyonunu elde ediniz.

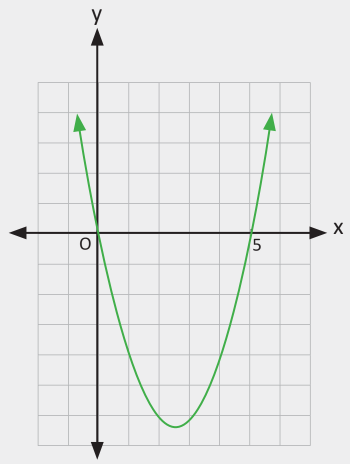


Sonuç

f(x – a) fonksiyonunda a pozitif ise f(x) fonksiyonun grafiği a birim sağa, a negatif ise f(x) fonksiyonu |a| birim sola ötelenir.

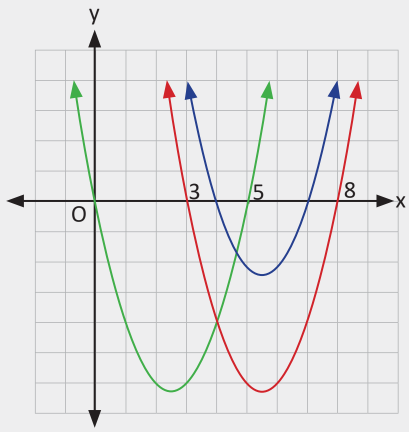
45. Örnek

f(x) fonksiyonunun grafiği orijinden ve (5, 0) noktasından geçmektedir. Buna göre f(x – 3) + 4 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



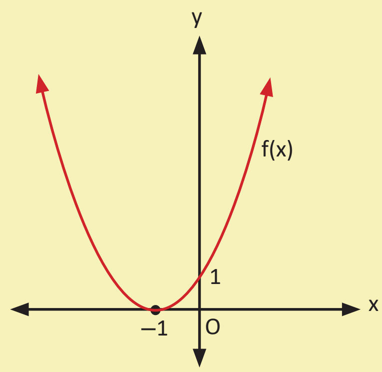
Çözüm

f(x) fonksiyonu x ekseni boyunca 3 birim sağa ötelendiğinde kırmızı renkli f(x – 3) parabolü elde edilir.
f(x – 3) + 4 fonksiyonunun grafiğini elde etmek için f(x – 3) parabolü 4 birim yukarı ötelenir. Mavi ile gösterilen f(x – 3) + 4 fonksiyonunun grafiği bu şekilde bulunur.
Grafik üzerinde, koordinatları belirli bir nokta esas alınarak öteleme yapılmıştır.



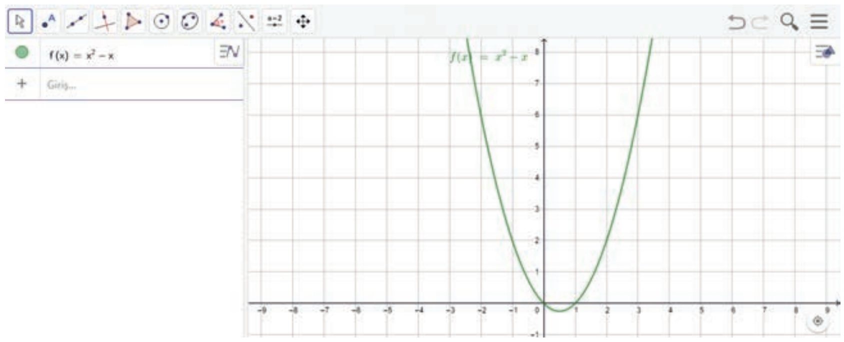
Sıra Sizde

f(x) fonksiyonunun grafiği (–1, 0) noktasında x eksenine teğet olup (0, 1) noktasından geçmektedir. Buna göre y = f(x + 3) – 5 fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

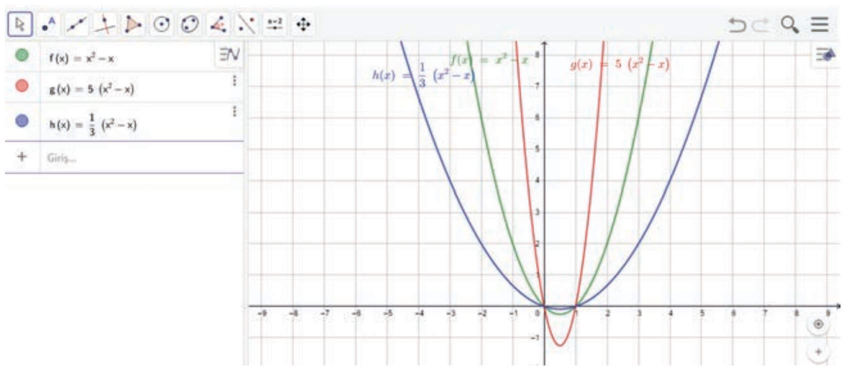


8. Uygulama: k·f(x) Dönüşümü

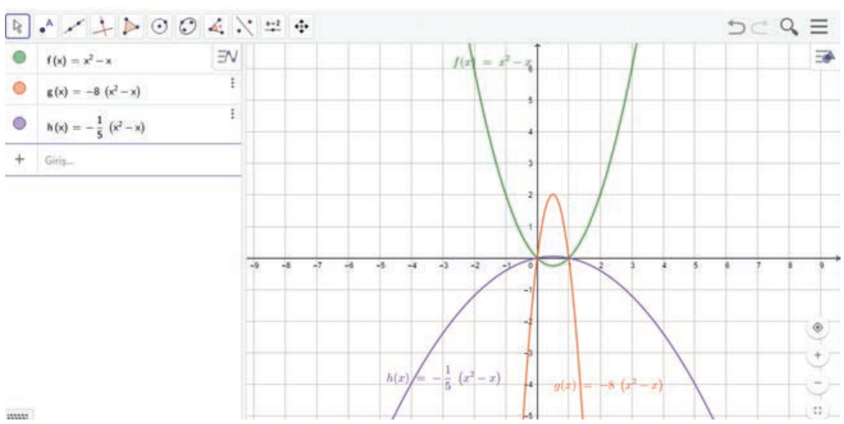
Girişe $x^2 - x$ yazarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz. y = k·f(x) fonksiyonunun k nin değişen değerlerine göre nasıl şekillendiğini inceleyiniz.
k = 5 ve k =1/3 değerleri için 5f(x) ve (1/3)f(x) grafiklerini çiziniz.



Girişe 5f yazarak Enter tuşuna basınız.
Girişe (1/3)f yazarak Enter tuşuna basınız.



k = −8 ve k = −1/5 için fonksiyon grafiklerini oluşturunuz.
Girişe −8f yazarak Enter tuşuna basınız.
Girişe (−1/5)f yazarak Enter tuşuna basınız.

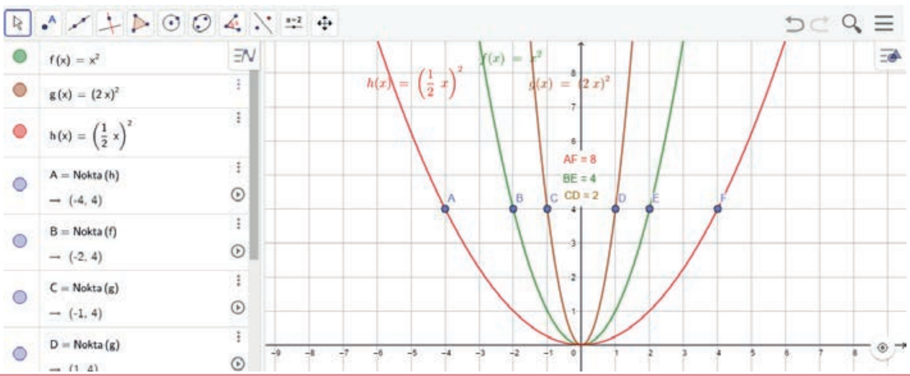


Sonuç

Yukarıdaki grafiklerde görüldüğü gibi k·f(x) parabolünde k değeri mutlak değer olarak arttıkça f(x) parabolünün kolları arasındaki açıklık daralmaktadır. k değeri mutlak değer olarak küçüldükçe parabolün kolları arasındaki açıklık artmaktadır.

9. Uygulama: f(k·x) Dönüşümü

Girişe x^2 yazarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz. f(k·x) grafiğini $k = 2$ ve $k = \frac{1}{2}$ için çiziniz.
Girişe f(2x) yazarak Enter tuşuna basınız.
Girişe f((1/2)x) yazarak Enter tuşuna basınız.
f(2x) in kolları arasındaki açıklık f(x) in kolları arasındaki açıklığın $\frac{1}{2}$ katıdır.
f((1/2)x) in kolları arasındaki açıklık f(x) in kolları arasındaki açıklığın 2 katıdır.

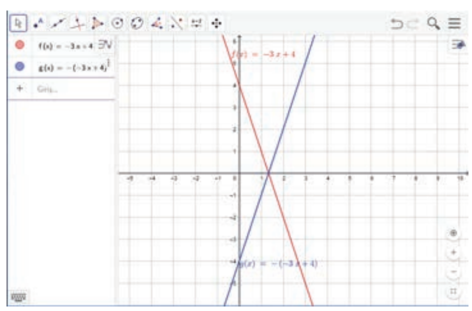


Sonuç

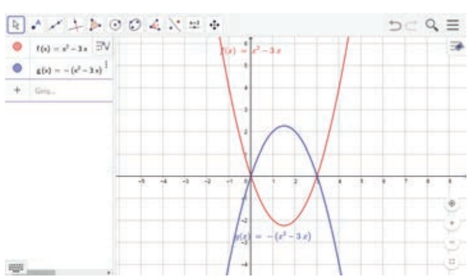
f(x) bir parabol olmak üzere f(k·x) in grafiğinin kolları arasındaki açıklık f(x) in kolları arasındaki açıklığın $\frac{1}{k}$ katına eşittir.

10. Uygulama: –f(x) Dönüşümü

Girişe –3x+4 yazarak Enter tuşuna basınız.
Girişe –f yazarak Enter tuşuna basınız.



Girişe x^2–3x yazarak Enter tuşuna basınız.
Girişe –f yazarak Enter tuşuna basınız.

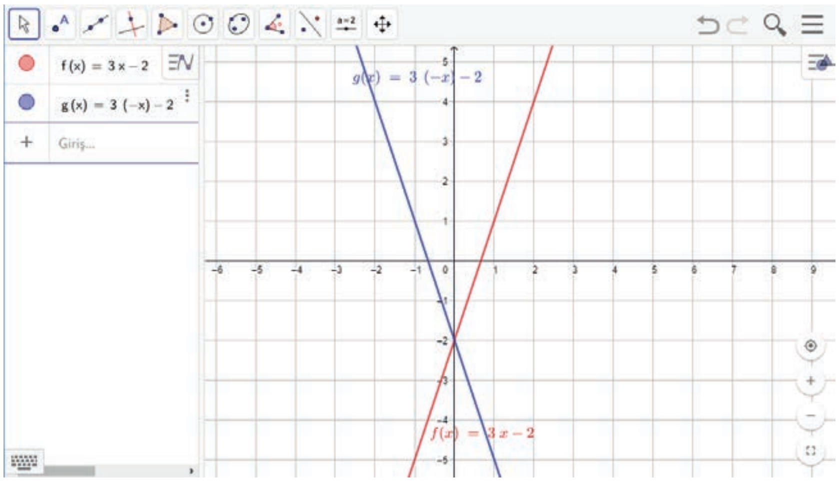


Sonuç

f(x) fonksiyonunun grafiği ile −f(x) fonksiyonunun grafiği x eksenine göre simetriktir.

11. Uygulama: f(−x) Dönüşümü

Girişe 3x−2 yazarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.
Girişe f(−x) yazarak fonksiyonun grafiğini oluşturunuz.

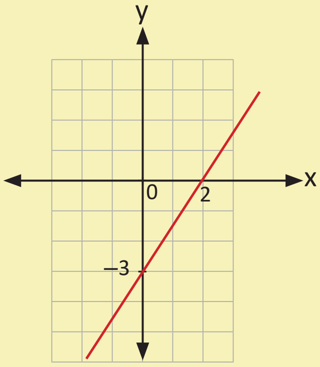


Sonuç

f(−x) ile f(x) in grafikleri y eksenine göre simetriktir.

Sıra Sizde

Yanda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f(x) fonksiyonunun denklemini bularak f(−x), −f(x), f(−x − 2), −f(−x) + 3 fonksiyonlarının grafiklerini GeoGebra yardımıyla çiziniz.



ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

1. $y = f(x)$ fonksiyonunun A ve B noktaları arasındaki .... bu noktalardan geçen kesenin eğimine eşittir.

2. İkinci dereceden fonksiyonların grafiğine .... denir.

3. $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonlarının grafiğinin tepe noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğruya .... denir.

4. Fonksiyon grafiğinin x eksenini kestiği noktaların apsislerine fonksiyonun .... denir.

5. Bir f(x) fonksiyonu bir aralıkta sıfırdan .... değerler almışsa o aralıkta fonksiyonun grafiği x ekseninin altında çizilir.

6. $y = ax^2$ parabollerinin simetri ekseni .... doğrusudur.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

7. Tepe noktası T(−2, 3) olan parabolün simetri ekseninin denklemi (   ) olur.

8. $y = x^2 + 5x + a$ parabolü x eksenine teğet olduğuna göre a nın değeri (   ) olur.

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x + 3$ fonksiyonunun <u>minimum</u> değeri (   ) olur.

10. İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamı −12 olduğuna göre simetri ekseninin denklemi (   ) olur.

11. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ fonksiyonunun grafiği a birim sola, b birim yukarı ötelendiğinde $g(x) = x^2 - 4x + 10$ fonksiyonunun grafiği elde ediliyor. Buna göre a·b değeri (   ) olur.

a) 18
b) $x = -6$
c) $x = -2$
ç) 5
d) $\frac{25}{4}$
e) −1
f) $x = 6$
g) $x = 2$

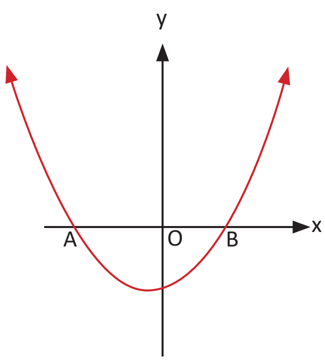
C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

12. $y = x^2 - 3x - 10$ parabolü ile $y = x + 2$ doğrusu A ve B noktalarında kesiştiğine göre AB uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

13. $y = (m + 1)x^2 - 2mx + 10$ parabolünün simetri ekseni $x = -\frac{1}{2}$ doğrusu olduğuna göre m değerini bulunuz.

14. $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonunun grafiği analitik düzlemde sağa doğru 3 birim, yukarı doğru 2 birim ötelenerek g(x) fonksiyonu elde ediliyor. Buna göre g(−4) değerini bulunuz.

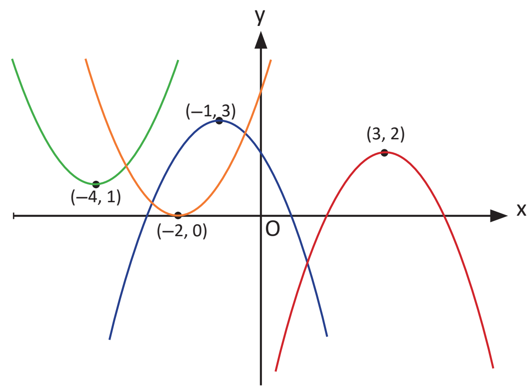
15.



Yukarıda $y = x^2 + x + 2a - 4$ parabolünün grafiği verilmiştir. |AB| = 5 birim olduğuna göre a değerini bulunuz.

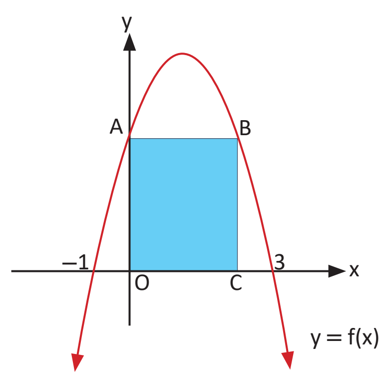
16. $y = (a - 2)x^2 + 2x + a + 4$ parabolünün tepe noktası 1. bölgededir. Parabol y eksenini pozitif tarafta kestiğine göre a nın kaç tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

17.



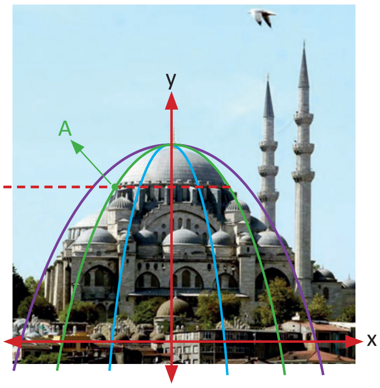
Yukarıdaki şekilde $y = -x^2$ parabolü dönüştürülerek 4 yeni parabol elde edilmiştir. Bu parabollerin denklemlerini yazınız.

18.



Yukarıdaki f(x) fonksiyonunun grafiği bir paraboldür. Bu parabol x eksenini (−1, 0), (3, 0) noktalarında keser. |BC| = 3 birim olduğunda OABC dikdörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

19. Bir mühendis Süleymaniye Camisi'nin kubbesinin mevcut hâlinden geniş ya da dar olması durumundaki görüntüsünü görmek istiyor. Caminin bir fotoğrafını analitik düzleme yerleştiren mühendis, kolları kubbenin sınırları ile örtüşen ve örtüşmeyen farklı renklerde paraboller çiziyor.

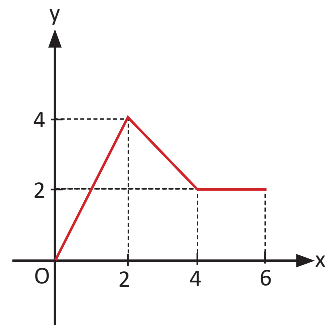


Mühendis
Yeşil parabolün denklemini $f(x) = ax^2 + c$,
Mavi parabolün denklemini $g(x) = dx^2 + c$,
Mor parabolün denklemini $h(x) = px^2 + c$
olarak yazıyor (a, c, d, p ∈ ℝ).
Yeşil parabol x eksenini (–6, 0) ve (6, 0) noktalarında kesmekte, A(–3, 27) noktasından geçmektedir. Fotoğrafta kubbenin alt sınırı 27 cm yükseklikte olduğuna göre
a) a, d ve p sayılarını sıralayınız.
b) Kubbenin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

20. Zeki Bey, bir kenarı nehirle sınırlı arazisinin bir bölümünü 3 çocuğu arasında şekildeki gibi eşit olarak paylaştırmak istiyor ve çocuklarına bu maksatla 360 metre dikenli tel veriyor. Zeki Bey'in her bir çocuğunun dikenli tel kullanarak saracağı arsanın maksimum alanını bulunuz.

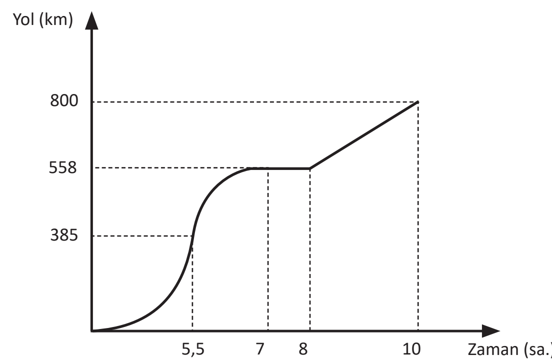


21.



Yukarıdaki şekilde f: [–6, 6] → ℝ fonksiyonunun grafiğinin bir bölümü verilmiştir. Grafiği fonksiyonun tek olma durumuna göre tamamlayınız.

22. Otomobiliyle Rize'den Ankara'ya seyahat eden Ömer Bey, 5 buçuk saat sonra Samsun'a varıyor. 1 buçuk saat daha yol aldıktan sonra Çorum'da 1 saat mola veriyor. Molanın ardından 2 saat sonra Ankara'ya ulaşıyor.
Ömer Bey'in seyahat esnasındaki konumlarının (km) zamana (sa.) bağlı grafiği aşağıda verilmiştir.

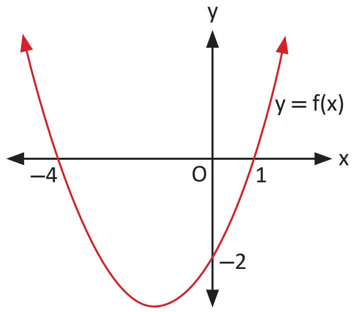


Grafiğe göre Ömer Bey'in
a) Yol boyunca yaptığı,
b) Rize-Samsun arasındaki,
c) 7 ile 8 saatleri arasındaki,
ç) Çorum-Ankara arasındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

23. Gıda Tarım ve Hayvancılık Bakanlığının verilerine göre Türkiye'deki çiftçilerin genel nüfusa oranı 2002 yılında %34,2 ve 2011 yılında %23,2 olarak tespit edilmiştir.
Bu yıllar arasında çiftçilerin genel nüfusa oranında meydana gelen ortalama değişim hızını bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

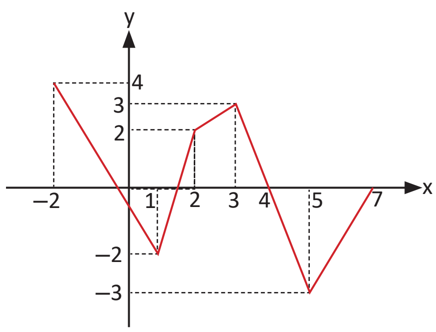
24.



Yukarıda y = f(x) parabolünün grafiği verilmiştir. Parabol üzerindeki A(−3, a) ve B(2, b) noktalarından geçen kesenin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 4

25.



Yukarıdaki f(x) fonksiyonunun grafiğinde hangi aralıktaki ortalama değişim hızı $\frac{5}{2}$ olur?

A) [−2, 2] B) [2, 4] C) [5, 7] D) [1, 3] E) [3, 5]

26. $y = 3x^2 - 3x + 5$ parabolü üzerinde apsisi m olan bir noktanın koordinatlar toplamının <u>en küçük</u> olması için m nin değeri kaç olmalıdır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{3}{4}$

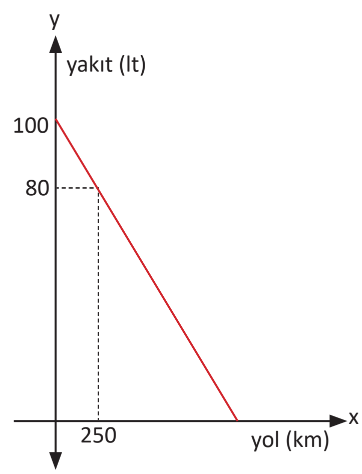
27. $y = x^2 - 2x + a$ parabolüne başlangıç noktasından çizilen teğetler birbirine dik olduğuna göre a kaçtır?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{5}{9}$

28. f(x) fonksiyonunun grafiği x eksenini (−2, 0) ve (4, 0) noktalarında kesmektedir. Buna göre f(x + 3) fonksiyonunun grafiği x eksenini hangi noktalarda keser?

A) 1 ve 2 B) 1 ve 7 C) −5 ve 1 D) −4 ve 3 E) −3 ve 1

29.



Bir aracın gittiği yola bağlı olarak deposundaki yakıtın değişim grafiği yukarıda verilmiştir. Aracın deposunda kalan yakıt miktarının aracın gittiği yolun bir fonksiyonu olarak ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 80x + 100$

B) $y = -\frac{1}{2}x + 100$

C) $y = -\frac{2}{25}x + 100$

D) $y = -20x + 100$

E) $y = -80x - 100$

SAYILAR VE CEBİR

4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

Bu bölümde

- İkinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulmayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulmayı

öğreneceksiniz.



KAVRAMLAR

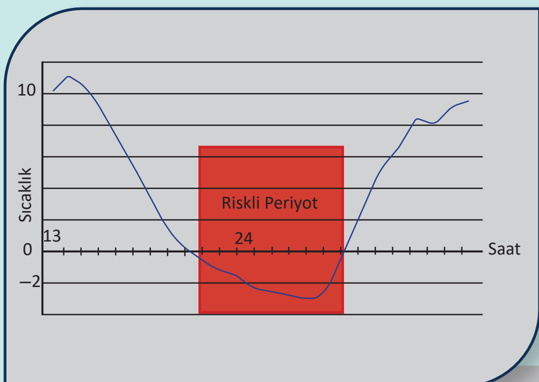
İkinci Dereceden Eşitsizlikler

HAZIRLIK ÇALIŞMASI



Vücut kitle endeksinin tespit edilmesi için kişinin kütlesi, boyunun karesine bölünür. Sağlıklı bir yaşam için vücut kitle endeksinin belirli aralıklarda olması gerekir.
Dünya Sağlık Örgütünün kriterlerine göre vücut kitle endeksi 30 un üzerinde olan kişiler obez, 40 ın üzerinde olanlar morbid obez, 50 nin üzerinde olanlar süper obez olarak değerlendirilir.

Yukarıda verilen bilgilere göre 180 cm uzunluğunda olan ve obez olarak değerlendirilen bir kişinin kilosu hangi aralıktadır?



Sıcaklık gün içinde genellikle öğleden sonra düşüşe geçmeye başlar. Düşüş gece yarısından itibaren kritik seviyenin (−2 °C) altına iner. Gün doğumuna kadar devam eden sıcaklık düşüşünde gökyüzünün açık veya kapalı olması, rüzgârın şiddeti, havadaki nem miktarı gibi değişkenler etkili olur. Bu değişkenlere bağlı olarak sıcaklık düşüşü hızlı ya da yavaş olabilir.

Sıcaklık sıfır derecenin altına düştüğünde yollarda buzlanma meydana gelir. Buzlanmanın meydana geldiği zaman aralığı (riskli periyot) hakkında ne söylenebilir?

4.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

4.1.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümesi

Hatırlatma

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi

a, b, c ∈ ℝ; a ve b sıfırdan farklı, x ve y değişkenler olmak üzere $ax + by + c = 0$ denklemi **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem**dir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli en az iki denklemin oluşturduğu sisteme **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Örneğin

$$\left.\begin{matrix} 2x + 4y = 7 \\ 3x - 5y = 8 \end{matrix}\right\}$$ denklemlerinin oluşturduğu sistem birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemidir.

a, b, c, d, e, f ∈ ℝ ve a, b, c reel sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı olmak üzere $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ şeklindeki ifadelere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem** denir.

İki bilinmeyenli en az iki denklemden oluşan sistemin denklemlerinden en az biri ikinci dereceden denklem ise bu sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Denklemlerin ortak çözüm kümesi **denklem sisteminin çözüm kümesi**dir.

Bu kitapta çözüm kümesi ÇK ile gösterilecektir.

1. Örnek

$$\left.\begin{matrix} x + y = 3 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{matrix}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x + y = 3$ denklemi $y = 3 - x$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında

$x^2 + 2x(3 - x) = 8 \Rightarrow x^2 + 6x - 2x^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$ olur. Bu denklem ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir. Denklem, çarpanlarına ayrıldığında

$(x - 4)(x - 2) = 0$ olur. Buradan

$x_1 = 4$ veya $x_2 = 2$ olur.

x_1 ve x_2 değerleri $y = 3 - x$ denkleminde yerine yazıldığında

$x_1 = 4$ için $y_1 = 3 - 4 = -1$ ve

$x_2 = 2$ için $y_2 = 3 - 2 = 1$ olur. Buradan

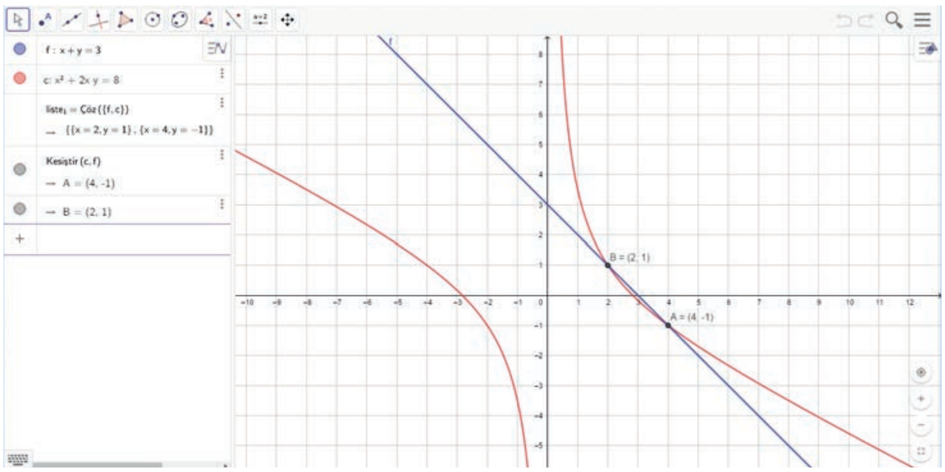
denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(4, -1), (2, 1)\}$ olur.

1. Uygulama: $x + y = 3$
$x^2 + 2xy = 8$ Denklem Sisteminin Çözüm Kümesi



Kesiştir

Girişe x+y=3 yazarak grafiği oluşturunuz.
Girişe x²+2xy=8 yazarak grafiği oluşturunuz.
Kesiştire, ardından grafiklerin her birine tıkladığınızda grafiklerin kesim noktaları grafik ekranında görülecektir.



Bu iki grafik iki noktada kesiştiğinden denklem sisteminin çözüm kümesi
ÇK = {(4, −1), (2, 1)} olur.

2. Örnek

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$2x + y = 7$ denklemi $y = 7 - 2x$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında
$x^2 + (7 - 2x)^2 = 13 \Rightarrow x^2 + 49 - 28x + 4x^2 = 13$
$\Rightarrow 5x^2 - 28x + 36 = 0$ olur. Denklem, çarpanlarına ayrıldığında
$(5x - 18)(x - 2) = 0$ olur. Buradan
$x_1 = \frac{18}{5}$ veya $x_2 = 2$ olur.
x_1 ve x_2 değerleri $y = 7 - 2x$ denkleminde yerine yazıldığında
$x_1 = \frac{18}{5}$ için $y_1 = 7 - 2 \cdot \frac{18}{5} = -\frac{1}{5}$ ve
$x_2 = 2$ için $y_2 = 7 - 2 \cdot 2 = 3$ olur. Buradan
denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \left\{(2,3), \left(\frac{18}{5}, -\frac{1}{5}\right)\right\}$ olur.

Sıra Sizde

$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 12 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. Örnek

$\left.\begin{array}{r} x^2 - 2x - y = 4 \\ 4x - y = 13 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$4x - y = 13$ denklemi $y = 4x - 13$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında

$x^2 - 2x - (4x - 13) = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 4x + 13 = 4$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ olur. Buradan

$x = 3$ değeri $y = 4x - 13$ denkleminde yerine yazıldığında

$y = 4 \cdot 3 - 13 = -1$ olur.

Denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(3, -1)\}$ olur.

2. Uygulama: $4x - y = 13$
$x^2 - 2x - y = 4$ Denklem Sisteminin Çözüm Kümesi

Girişe 4x–y=13 yazarak grafiği oluşturunuz.
Girişe x²–2x–y=4 yazarak grafiği oluşturunuz.
Kesiştire, ardından grafiklerin her birine tıklayarak kesişme noktasını bulunuz.



İki grafiğin birbirine teğet olduğu durumlarda çözüm kümesi tek noktadan oluşur.
Denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(3, -1)\}$ olur.

Hatırlatma

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci derece denklemi verilsin. Bu durumda $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

- $\Delta > 0$ ise denklemin iki farklı reel kökü vardır.
- $\Delta = 0$ ise denklemin çakışık iki reel kökü vardır.
- $\Delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur.

4. Örnek

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x + y = 4$ denklemi $y = 4 - x$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında

$x^2 + (4 - x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 = 5$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 11 = 0$ olur.

$2x^2 - 8x + 11 = 0$ denkleminin çözümü için $\Delta = b^2 - 4ac$ incelendiğinde

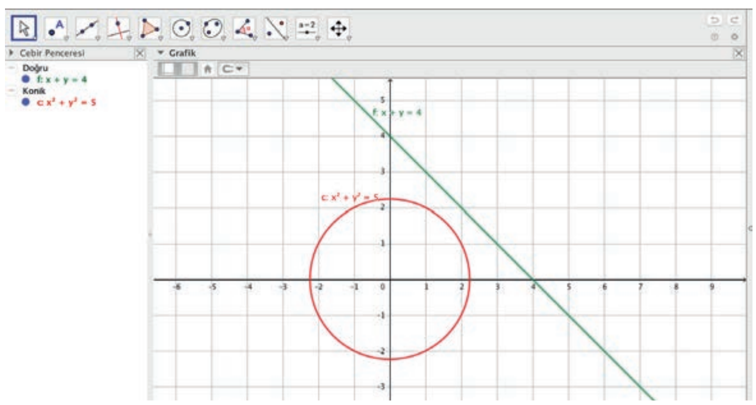
$a = 2$, $b = -8$ ve $c = 11$ için

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = 64 - 88 = -24$ olur.

$\Delta < 0$ olduğundan $2x^2 - 8x + 11 = 0$ denkleminin çözüm kümesi yoktur. Buradan denklem sisteminin çözüm kümesi ÇK = { } olur.

3. Uygulama: $x + y = 4$
$x^2 + y^2 = 5$ Denklem Sisteminin Çözüm Kümesi

Girişe x+y =4 yazarak grafiği oluşturunuz.
Girişe x^2+y^2 =5 yazarak grafiği oluşturunuz.
İki grafiğin birbiri ile kesişmediği durumlarda denklem sisteminin çözüm kümesi yoktur.
Denklem sisteminin çözüm kümesi ÇK = { } olur.



5. Örnek

İki sayının toplamı 6, kareleri farkı 24 olduğuna göre büyük olan sayıyı bulunuz.

Çözüm

Büyük sayı x, küçük sayı y olsun.

$x + y = 6$

$x^2 - y^2 = 24$ olur.

El edilen denklem sistemi çözülürse istenen sayı bulunur.

$x^2 - y^2 = 24$ denklemi $(x - y)(x + y) = 24$ şeklinde yazılır. Bu durumda

$x + y = 6$ olduğu için $x - y = 4$ olur.

$x + y = 6$ ve $x - y = 4$ denklemleri ortak çözüldüğünde $2x = 10 \Rightarrow x = 5$ olur.

6. Örnek

$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 2 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x + y = 3$ denklemi $y = 3 - x$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında

$x(3 - x) = 2 \Rightarrow 3x - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ olur. Denklem, çarpanlarına ayrıldığında
$(x - 1)(x - 2) = 0$ olur. Buradan
$x_1 = 1$ veya $x_2 = 2$ olur.
x_1 ve x_2 değerleri $y = 3 - x$ denkleminde yerine yazıldığında
$x_1 = 1$ için $y_1 = 3 - 1 = 2$ ve
$x_2 = 2$ için $y_2 = 3 - 2 = 1$ olur. Buradan
denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(1, 2), (2, 1)\}$ olur.

7. Örnek

$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8 \\ 2x^2 - 3y^2 &= -4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2 + y^2 = 8$ denklemi 3 ile çarpıldığında $3x^2 + 3y^2 = 24$ olur. Bu durumda denklem sistemi

$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 &= 24 \\ 2x^2 - 3y^2 &= -4 \end{aligned}\right\}$ şekline dönüşür. Yok etme yöntemi uygulandığında
$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ veya $x_2 = 2$ olur.
x_1 ve x_2 değerleri $x^2 + y^2 = 8$ denkleminde yerine yazıldığında
$x_1 = -2$ için $(-2)^2 + y^2 = 8 \Rightarrow 4 + y^2 = 8$
$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y_1 = -2$ veya $y_2 = 2$ ve
$x_2 = 2$ için $2^2 + y^2 = 8 \Rightarrow 4 + y^2 = 8$
$\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y_3 = -2$ veya $y_4 = 2$ olur. Buradan
denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)\}$ olur.

Sıra Sizde

$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 14 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

8. Örnek

$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 2x^2 - y^2 - 2xy &= -1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$2x - y = 1$ denklemi $y = 2x - 1$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında

$2x^2 - (2x - 1)^2 - 2x(2x - 1) = -1$ olur.

$2x^2 - (4x^2 - 4x + 1) - 4x^2 + 2x = -1$

$2x^2 - 4x^2 + 4x - 1 - 4x^2 + 2x = -1 \Rightarrow -6x^2 + 6x = 0$

$\Rightarrow x^2 - x = 0$ olur.

Denklem, çarpanlarına ayrıldığında $x(x - 1) = 0$ olur. Buradan

$x_1 = 0$ veya $x_2 = 1$ olur.

x_1 ve x_2 değerleri $y = 2x - 1$ denkleminde yerine yazıldığında

$x_1 = 0$ için $y_1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ ve

$x_2 = 1$ için $y_2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ olur. Buradan

denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(0, -1), (1, 1)\}$ olur.

9. Örnek

$\left.\begin{aligned} -x + y &= 7 \\ x - y^2 &= -19 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$-x + y = 7$ denklemi $y = x + 7$ şeklinde bulunup diğer denklemde yerine yazıldığında

$x - (x + 7)^2 = -19 \Rightarrow x - (x^2 + 14x + 49) = -19$

$\Rightarrow x - x^2 - 14x - 49 = -19$

$\Rightarrow x^2 + 13x + 30 = 0$ olur.

Denklem, çarpanlarına ayrıldığında $(x + 10)(x + 3) = 0$ olur. Buradan

$x_1 = -3$ veya $x_2 = -10$ olur.

x_1 ve x_2 değerleri $y = x + 7$ denkleminde yerine yazıldığında

$x_1 = -3$ için $y_1 = -3 + 7 = 4$ ve

$x_2 = -10$ için $y_2 = -10 + 7 = -3$ olur. Buradan

denklem sisteminin çözüm kümesi $ÇK = \{(-10, -3), (-3, 4)\}$ olur.

Sıra Sizde

$\left.\begin{aligned} x^2 + x - y^2 &= 8 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Alıştırmalar

1. İki sayının farkı −4, kareleri farkı −8 olduğuna göre bu sayıların çarpımını bulunuz.

2. $\left.\begin{array}{r} x^2 - y^2 - 2xy = -7 \\ y - 2x = 0 \end{array}\right\}$
denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 2y^2 - 3x + 2 = 0 \\ y^2 + 2x - 7 = 0 \end{array}\right\}$
denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4. $\left.\begin{array}{r} 2x^2 + 3y^2 = 35 \\ x^2 + y^2 = 18 \end{array}\right\}$
denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $\left.\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 7 \\ 3x^2 + y^2 = 57 \end{array}\right\}$
denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$
denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

4.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ve Eşitsizlik Sistemleri

4.2.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözüm Kümesi

$x \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere bir malın maliyeti x, satış fiyatı $x^2 - x + 11$ olsun.
Malın satışından kâr elde edilme durumu $x^2 - x + 11 - x > 0$ şeklinde ifade edilir.

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ ifadelerinin her birine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** ve eşitsizliği sağlayan x değerlerinin kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.
$ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden üç terimlisinin hangi aralıkta pozitif, hangi aralıkta negatif değer alacağı, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ olmak üzere üç durumda incelenir.

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki kökü vardır. Bu kökler $x_1 < x_2$ olmak üzere x_1 ve x_2 olsun. Bu durumda $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibi incelenir.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretiyle aynı	○	a nın işaretinin tersi	○	a nın işaretiyle aynı

İşaret tablosunun en sağındaki aralık a nın işaretiyle aynıdır. Sağdan sola doğru her aralıkta işaretler değişir.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $x_1 = x_2$ olacak şekilde birbirine eşit (çakışık, çift katlı) iki kökü vardır.

Bu durumda $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibi incelenir.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretiyle aynı	○○	a nın işaretiyle aynı

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirine eşit iki kökü varsa işaret tablosundaki kökün sağ ve sol tarafındaki aralıkların işareti a nın işaretiyle aynı olur.

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökü yoktur.

Bu durumda $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibi incelenir.

x	$-\infty$ reel kök yok $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretiyle aynı

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökü yoksa işaret tablosunda $(-\infty, \infty)$ nda $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işareti a nın işaretiyle aynıdır.

Not

İşaret tablosu oluşturulurken kullanılacak gösterimler:

	Payın kökü		Paydanın kökü
Tek katlı	●	○	○
Çift katlı	●●	○○	○○
	Eşitlik	Eşit olmama	Eşitlik ve eşit olmama

10. Örnek

$f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

Çözüm

$x^2 - 5x + 4 = 0$ denkleminin katsayıları $a = 1$, $b = -5$ ve $c = 4$ olur.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 > 0$ olduğundan f(x) fonksiyonunun farklı iki sıfırı vardır ve bunlar

$x^2 - 5x + 4 = (x - 4) \cdot (x - 1) = 0$ denkleminin kökleri

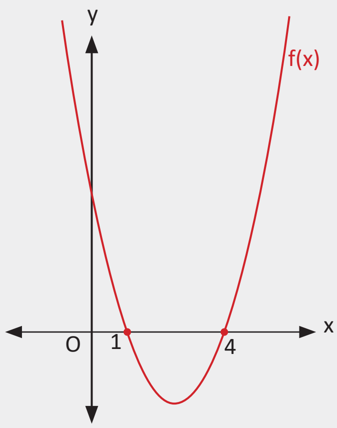
$x_1 = 4$ veya $x_2 = 1$ olarak bulunur.

$a = 1 > 0$ olduğundan fonksiyonun işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		+	0	−	0	+	

$f(1) = 0$ $f(4) = 0$

Yandaki şekilde görüldüğü gibi $f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonksiyonunun grafiği $(-\infty, 1)$, $(4, +\infty)$ nda x ekseninin üst kısmındadır.
Bu aralıklarda $f(x) > 0$ olur.
f(x) fonksiyonunun grafiği (1, 4) nda x ekseninin alt kısmındadır. Bu aralıkta $f(x) < 0$ olur.



Not

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun işareti incelenirken işaret tablosunda en sağ aralığa a nın işareti yazılır. İşaret, tek katlı köklerde değişirken çift katlı köklerde değişmez.

Sonuç

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda her $x \in \mathbb{R}$ için
$f(x) > 0$ ise $\Delta < 0$ ve $a > 0$
$f(x) < 0$ ise $\Delta < 0$ ve $a < 0$ olmalıdır.

11. Örnek

$f(x) = x^2 + 3x + 3$ fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

Çözüm

$x^2 + 3x + 3 = 0$ denkleminde

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$ olduğundan $f(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur.

$a = 1 > 0$ olduğundan fonksiyonun işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$ reel kök yok $+\infty$
f(x)	+

12. Örnek

$f(x) = -x^2 + 2x - 2$ fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

Çözüm

$-x^2 + 2x - 2 = 0$ denkleminde

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ olduğundan $f(x) = 0$ denkleminin kökü yoktur.

$a = -1 < 0$ olduğundan fonksiyonun işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$ reel kök yok $+\infty$
f(x)	−

13. Örnek

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

Çözüm

$x^2 - 4x + 4 = 0$ denkleminde

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ olduğundan denklemin çift katlı kökü vardır ve bu kök

$x_1 = x_2 = r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ olarak bulunur.

$a = 1 > 0$ olduğundan fonksiyonun işaret tablosunun en sağ aralığı (+) ile başlar. İşaret tablosu çift katlı köklerde sola doğru işaret değiştirmez.

$x^2 - 4x + 4 = 0$ denkleminin çift katlı kökü vardır. İşaret tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$	+	0 0	+

14. Örnek

$3x^2 - 5x - 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$3x^2 - 5x - 2 = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$ olduğundan denklemin farklı iki reel kökü vardır. Denklemin kökleri çarpanlara ayırma yöntemiyle
$(3x + 1) \cdot (x - 2) = 0$
$x_1 = -\frac{1}{3}$ veya $x_2 = 2$ olarak bulunur.

$a = 3 > 0$ olduğundan işaret tablosunun en sağ aralığı (+) ile başlayıp sola doğru tek katlı köklerde işaret değiştirerek en soldaki aralığa kadar devam eder.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2 - 5x - 2$		+		−		+	

$3x^2 - 5x - 2 > 0$ eşitsizliğinde istenen aralıklar (+) olan aralıklardır. Bu aralıklar işaret tablosunda taralı olarak gösterilmiştir.
Böylece $3x^2 - 5x - 2 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (2, \infty)$ olur.

Sıra Sizde

$2x^2 + 3x - 5 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

15. Örnek

$x^2 - 2x + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ olduğundan denklemin reel kökü yoktur.
$a = 1 > 0$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olur.

x	$-\infty$	reel kök yok	$+\infty$
$x^2 - 2x + 3$		+	

Tabloda görüldüğü gibi $x^2 - 2x + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = \{ \}$ olur.

16. Örnek

$x^2 < 3 - 2x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

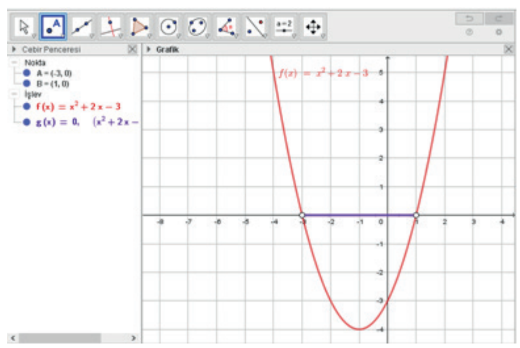
Çözüm

$x^2 < 3 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$
$x^2 + 2x - 3 = 0$ denkleminin kökleri
$(x + 3)\cdot(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ veya $x_2 = 1$ olarak bulunur.
$x^2 + 2x - 3$ ifadesinde $a = 1 > 0$ olduğundan işaret tablosunun en sağ aralığı (+) ile başlayıp sola doğru tek katlı köklerde işaret değiştirerek en soldaki aralığa kadar devam eder.
Eşitsizliğin işaret tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

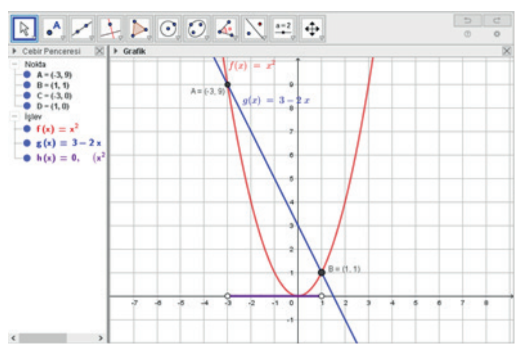
x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	−	+	

Böylece $x^2 + 2x - 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = (-3, 1)$ olur.

4. Uygulama: $x^2 < 3 - 2x$ Eşitsizliğinin Çözüm Kümesi



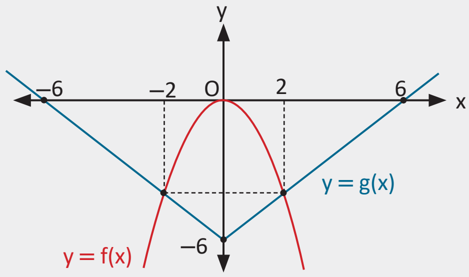
1. Yol: $x^2 < 3 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$
Girişe x²+2x–3 yazarak grafiği çiziniz.
Cebir penceresinde fonksiyon
$f(x) = x^2 + 2x - 3$ olarak gözükür.
Girişe eğer yazınız. Çıkan satırda **şart**, **doğruysa** bölümlerine sırasıyla **f<0** ve **0** yazınız.
Grafik ekranında $x^2 + 2x - 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi farklı bir renkte x ekseni üzerinde görülür. Bu eşitsizliğin çözüm kümesi (-3, 1) olur.
Grafikte görüldüğü gibi (-3, 1) nda her x değeri için f(x) değerleri daima sıfırdan küçüktür.



2. Yol: $x^2 < 3 - 2x$
Girişe x² yazarak parabolün grafiğini çiziniz.
Grafik ekranında fonksiyon $f(x) = x^2$ olarak görülür.
Girişe 3–2x yazarak doğrunun grafiğini çiziniz.
Fonksiyon grafik ekranında $g(x) = 3 - 2x$ olarak görülür.
$f(x) < g(x)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini görüntülemek için **Girişe eğer** yazılır. Oluşan satırda **şart**, **doğruysa** yerine sırasıyla **f<g, 0** yazınız. Grafikte bu eşitsizliğin çözüm kümesi x ekseni üzerinde farklı bir renkte görülür.
$f(x) < g(x)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi (–3, 1) olur.
Grafikte görüldüğü gibi (–3, 1) nda her x değeri için f(x) < g(x) olur.

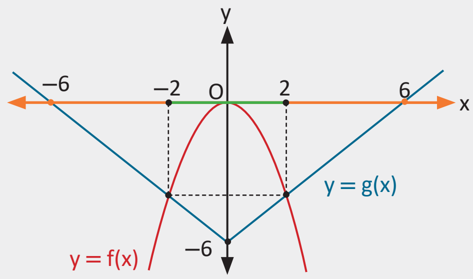
17. Örnek

Yanda verilen f ve g fonksiyonlarının grafikleri için
a) $f(x) < g(x)$ eşitsizliğini,
b) $f(x) > g(x)$ eşitsizliğini,
c) $f(x) = g(x)$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin kümesini bulunuz.



Çözüm

Grafikte görüldüğü üzere
a) $(-\infty, -2)$ ve $(2, \infty)$ nda $x < -2$ ve $x > 2$ için f(x) değerleri g(x) değerlerinden küçük olduğundan $ÇK = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ olur.
b) $(-2, 2)$ nda her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > g(x)$ olduğundan $ÇK = (-2, 2)$ olur.
c) $x = 2$ ve $x = -2$ için $f(x) = g(x)$ olduğundan $ÇK = \{-2, 2\}$ olur.



$ax + b$ veya $ax^2 + bx + c$ Şeklindeki İfadelerin Çarpımı veya Bölümü Şeklinde Verilen Eşitsizlikler

İki ifadenin çarpımı veya bölümü şeklinde verilen eşitsizliklerin çözüm kümesi bulunurken her bir ifadenin kökleri işaret tablosunda gösterilir. Bölüm şeklindeki eşitsizliklerde paydanın kökü çözüm kümesine dâhil edilmez.

18. Örnek

$(x^2 - 4x + 4)\cdot(x - 5) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$(x^2 - 4x + 4)\cdot(x - 5) = (x - 2)^2\cdot(x - 5) = 0$ denkleminin kökleri
$(x - 2)^2 = 0$ veya $x - 5 = 0$ eşitliklerinden
$x_1 = x_2 = 2$ (çift katlı kök) veya $x_3 = 5$ olarak bulunur.
Burada bulunan 2 ve 5 değerleri, $\geq$ sembolü kullanıldığı için çözüm kümesine dâhildir. Bu durumda işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$	+	●	+		+
$x - 5$	–		–	●	+
$(x^2 - 4x + 4)\cdot(x - 5)$	$(+)\cdot(-) = -$	●	$(+)\cdot(-) = -$	●	$(+)\cdot(+) = +$

$(x^2 - 4x + 4)\cdot(x - 5) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = [5, \infty) \cup \{2\}$ olarak bulunur.

19. Örnek

$(x-2)\cdot(x^2-x-2) \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

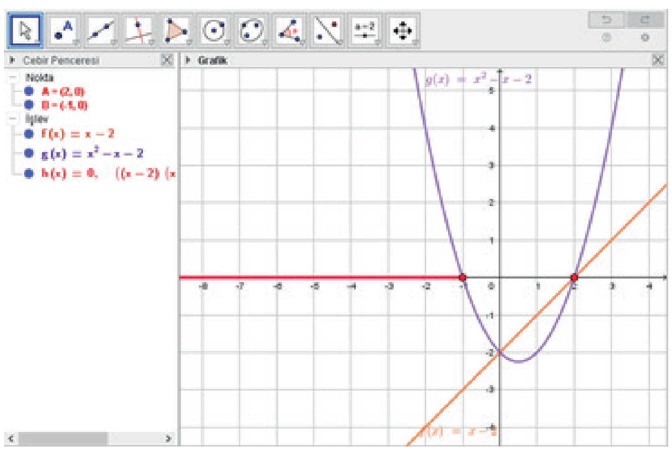
$(x-2)\cdot(x^2-x-2) = (x+1)\cdot(x-2)^2 = 0$ denkleminin kökleri aşağıdaki gibi bulunur.
$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ (çift katlı kök)
$(x+1) = 0 \Rightarrow x_3 = -1$ olur.
$(1\cdot x-2)\cdot(1\cdot x^2-x-2)$ ifadesinde $1\cdot 1 > 0$ olduğundan işaret tablosu (+) ile başlar.
Bu durumda fonksiyonun işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$(x-2)\cdot(x^2-x-2)$	$-$	$+$	$+$	

$(x-2)\cdot(x^2-x-2) \le 0$ olduğundan eşitsizliğin çözüm kümesi ÇK $= (-\infty, -1] \cup \{2\}$ olarak bulunur.

5. Uygulama: $(x-2)\cdot(x^2-x-2) \le 0$ Eşitsizliğinin Çözüm Kümesi

Girişe **x–2** yazarak grafiği çiziniz.
Girişe **x² –x–2** yazarak grafiği çiziniz. Çizilen grafiklerin cebirsel karşılığı cebir penceresinde sırayla f(x) ve g(x) olarak gözükecektir. **Giriş**e **eğer** yazınız. Oluşan satırdaki **şart**, **doğruysa** yerine sırasıyla **f*g≤0**, **0** yazınız. Grafik ekranında bu eşitsizliğin çözüm kümesi farklı bir renkte görülecektir.
Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -1] \cup \{2\}$ olur.
$(-\infty, -1] \cup \{2\}$ kümesindeki her x değeri için $f(x)\cdot g(x) \le 0$ olur.



Sıra Sizde

$(x-3)\cdot(x^2-x-6) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

20. Örnek

$\frac{x-5}{3-x} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$\frac{x-5}{3-x}$ ifadesinde pay ve paydanın kökleri

$x-5=0 \Rightarrow x=5$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$ olur.

$\frac{1 \cdot x-5}{3-1 \cdot x}$ ifadesinde $\frac{1}{-1}=-1<0$ olduğundan işaret tablosu (–) ile başlar.

x	$-\infty$	3		5		∞
$\frac{x-5}{3-x}$	–	○	+	●	–	

İşaret tablosuna göre $\frac{x-5}{3-x} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ÇK = (3, 5] olur.

21. Örnek

$\frac{-x-7}{x^2-6x+9} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

Burada $-x-7=0$ ve $x^2-6x+7=0$ denklemlerinin kökleri

$-x-7=0 \Rightarrow x_1=-7$

$x^2-6x+9=(x-3)^2=0 \Rightarrow x_2=x_3=3$ (paydanın çift katlı kökü) olarak bulunur.

Bu durumda işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	-7		3		$+\infty$
$-x-7$	+	○	–		–	
x^2-6x+9	+		+	○○	+	
$\frac{-x-7}{x^2-6x+9}$	(+)·(+) = +	○	(–)·(+) = –	○○	(–)·(+) = –	

Çözüm kümesi ÇK = (–7, 3) ∪ (3, ∞) olarak bulunur.

Not

İçerisinde $ax+b$ veya ax^2+bx+c şeklinde ifadeleri çarpım veya bölüm hâlinde bulunduran eşitsizliklerde işaret incelemesini tek satırda yapmak için

- Eşitsizliği oluşturan çarpanların her birinin kökleri bulunur.
- Her bir ifadenin başkatsayısı birbiri ile çarpılır. Çıkan sonucun işareti tablodaki en sağ aralığa yazılır.
- Aynı kökten 2 nin katı kadar sayıda bulunduğunda bu kökün sağ ve sol aralığındaki işaret aynıdır. Tek katlı kökler için bu kökün sağ ve sol aralığındaki işaret farklıdır.

Bu işlem en soldaki aralığa kadar devam ettirilerek işaret tablosu oluşturulur.

22. Örnek

$x+\frac{2}{x} \le 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x+\frac{2}{x} \le 3$ eşitsizliği $f(x) = x+\frac{2}{x} - 3 \le 0$ şeklinde düzenlendiğinde

$\frac{1 \cdot x^2 - 3x + 2}{1 \cdot x} \le 0$ elde edilir.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ ve $x = 0$ denklemlerinin kökleri

$(x-2)\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ veya $x_2 = 1$

$x_3 = 0$ (paydanın kökü) olarak bulunur.

$\frac{1}{1} > 0$ olduğundan işaret tablosu (+) ile başlar.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x+\frac{2}{x} \le 3$	−	+	−	+	

İşaret tablosuna göre $x+\frac{2}{x} \le 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = (-\infty, 0) \cup [1, 2]$ olur.

23. Örnek

$\frac{(x^2-5x+6)\cdot(x+1)}{2-x} \ge 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$\frac{(1\cdot x^2-5x+6)\cdot(1\cdot x+1)}{2-1\cdot x} \ge 0$ eşitsizliğini oluşturan ifadelerin kökleri aşağıdaki gibi bulunur.

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ veya $x_2 = 3$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$

$2 - x = 0 \Rightarrow x_4 = 2$ (paydanın kökü)

$x_1 = x_4 = 2$ değeri pay ve paydanın kökü olduğundan çift katlı köktür fakat bu değer, paydayı tanımsız yaptığı için çözüm kümesine dâhil edilmez.

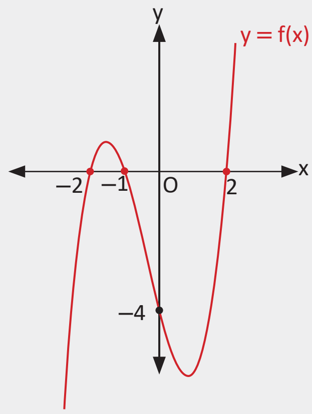
$\frac{1\cdot 1}{-1} < 0$ olduğundan işaret tablosu (−) ile başlar.

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$\frac{(x^2-5x+6)\cdot(x+1)}{2-x} \ge 0$	−	+	+	−	

İşaret tablosuna göre $\frac{(x^2-5x+6)\cdot(x+1)}{2-x} \ge 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = [-1, 3] - \{2\}$ olur.

24. Örnek

x eksenini $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarında; y eksenini $(0, -4)$ noktasında kesen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.



a) $f(x) \geq 0$

b) $x \cdot f(x) < 0$

c) $\dfrac{f(x)}{-x+2} \leq 0$ eşitsizliklerinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

a) Grafiğin x ekseninin üst kısmında kalan bölümleri için $f(x) > 0$ olur. Fonksiyon, kök değerlerinde sıfıra eşittir.
$f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi
$ÇK = [-2, -1] \cup [2, \infty)$ olarak bulunur.

b) Burada $x = 0$ ve $f(x) = 0$ denklemlerinin kökleri
$x_1 = 0$
$x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$ olur.
$(2, \infty)$ nda $f(x) > 0$ olduğundan ikinci satırda tabloya (+) ile başlanır.

x	−∞		−2		−1		0		2		+∞
x		−		−		−	○	+		+	
f(x)		−	○	+	○	−		−	○	+	
x·f(x)		+	○	−	○	+	○	−	○	+	

$x \cdot f(x) < 0$ eşitsizliği, kök değerlerini sağlamadığından çözüm kümesine dâhil edilmez.
Eşitsizliğinin çözüm kümesi $ÇK = (-2, -1) \cup (0, 2)$ olarak bulunur.

c) Burada $-x + 2 = 0$ ve $f(x) = 0$ denklemlerinin kökleri
$-x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ve
$x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$ olur.
$x = 2$ değeri pay ve paydanın kökü olduğundan çift katlı köktür fakat bu değer, paydayı tanımsız yaptığı için çözüm kümesine dâhil edilmez.
$(2, \infty)$ nda $f(x) > 0$ olduğundan ikinci satırda tabloya (+) ile başlanır.

x	−∞		−2		−1		2		+∞
−x + 2		+		+		+	○	−	
f(x)		−	●	+	●	−	●	+	
$\frac{f(x)}{-x+2}$		−	●	+	●	−	○	−	

$\dfrac{f(x)}{-x+2} \leq 0$ ifadesi paydanın kökü için tanımsız olduğundan 2 değeri çözüm kümesine dâhil edilmez.

Çözüm kümesi $ÇK = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty) - \{2\}$ olarak bulunur.

25. Örnek

$f(x) = x^2 - 2x + m$ fonksiyonu daima sıfırdan büyük değerler aldığına göre m nin en küçük tam sayı değerini bulunuz.

Çözüm

$ax^2 + bx + c$ fonksiyonu daima sıfırdan büyük ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

$x^2 - 2x + m$ fonksiyonunda $a = 1 > 0$ olur. $\Delta < 0$ olacağından fonksiyonun grafiğinin kolları yukarı doğru olur ve x eksenini kesmez. Bu durumda

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0$

$\Rightarrow -4m < -4 \Rightarrow m > 1$ olur.

m nin en küçük tam sayı değeri $m = 2$ olarak bulunur.

26. Örnek

$\dfrac{-x^2 + 4x - 5}{x^2 + (m-1)x + 1} < 0$ eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}$ için sağlandığına göre m nin alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

Çözüm

$-x^2 + 4x - 5 = 0$ denkleminde

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4 < 0$ olduğu için reel kök yoktur.

$a < 0$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $-x^2 + 4x - 5 < 0$ olur.

Eşitsizliğin gerçekleşmesi için

$x^2 + (m-1)x + 1 > 0$ dolayısıyla $\Delta < 0$ ve $a > 0$ olmalıdır.

Burada $a = 1$ olduğundan $a > 0$ şartı sağlanır.

$\Delta = (m-1)^2 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 < 0$ olmalıdır.

$m^2 - 2m - 3 = 0$ denkleminin kökleri

$(m-3) \cdot (m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 3$ veya $m_2 = -1$ olarak bulunur.

Bulunan bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

m	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$m^2 - 2m - 3$	+	○	−	○	+

$\Delta = m^2 - 2m - 3 < 0$ olduğundan kökler çözüme dâhil edilmez.

Bu aralıktaki m tam sayı değerleri 0, 1 ve 2 olur.

Sıra Sizde

$f(x) = (1 - a)x^2 - 4x - 1$ fonksiyonunun daima sıfırdan küçük değerler alması için a nın alacağı <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

Alıştırmalar

1. $(x-1)\cdot(-x^2-6x-9) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

2. $(x^2-9)\cdot(x^2-2x-3) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

3. $x > \dfrac{4}{x}$ eşitsizliğini sağlayan <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

4. $\dfrac{x\cdot(x-7)}{9x-x^3} \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamını bulunuz.

5. $\dfrac{(x-4)\cdot(x+6)}{x^2-6x+5} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

6. $(x-2)\cdot(2x-1) \leq (x-2)^2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

7. $\dfrac{(2x+1).(x^2-3x+2)}{x-1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

8. $\dfrac{(x-7)\cdot(-x+2)}{(x-3)^2} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

4.2.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemlerinin Çözüm Kümesi

İki ya da daha çok eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **eşitsizlik sistemi** denir.
Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi eşitsizliklerin her birini sağlayan noktalar kümesidir.
İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemleri, f(x) ve g(x) fonksiyonlarının biri 2. dereceden, diğeri 1 veya 2. dereceden verilmesiyle oluşan sistemlerdir.
Bu sistemler

$\left.\begin{matrix} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} f(x) < 0 \\ g(x) \leq 0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}\right\}$ vb. şekilde ifade edilir.

Bu şekildeki eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümeleri, ortak işaret tablosu oluşturularak bulunacaktır.

27. Örnek

$\left.\begin{matrix} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x + 3 < 0 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$ olduğundan denklemin kökleri $x_1 = -2$ veya $x_2 = 3$ olur.
$x + 3 = 0$ denkleminin kökü $x_3 = -3$ olarak bulunur.
Bulunan bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$ … -3	-3 … -2	-2 … 3	3 … $+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	+	−	+
$x + 3$	−	+	+	+

$x^2 - x - 6 \geq 0$ olan bölgeler taranır.
$x + 3 < 0$ olan bölge taranır.
Taralı bölgelerdeki ortak noktalar çözüm kümesini oluşturur.
Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi ÇK= $(-\infty, -3)$ olur.

28. Örnek

$\left.\begin{matrix} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x < 0 \end{matrix}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2$ veya $x_2 = 1$ olur.
$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0$ denkleminin kökleri $x_3 = 0$ ve $x_4 = -1$ olarak bulunur.
Bulunan bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	+	+	−	+
$x^2 + x$	+	−	+	+	+

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$ olan bölgeler taranır. $x^2 + x < 0$ olan bölge taranır.
Taralı bölgelerdeki ortak noktalar, çözüm kümesini oluşturur.
Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi ÇK = $(-1, 0)$ olur.

29. Örnek

$\left.\begin{array}{r} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 < 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0$ olduğundan denklemin kökleri $x_1 = -4$ veya $x_2 = 1$ olur.
$4 - x^2 = 0 \Rightarrow (2 + x)(2 - x) = 0$ olduğundan denklemin kökleri $x_3 = 2$ veya $x_4 = -2$ olur.
Bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		-4		-2		1		2		$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		+	●	−		−	●	+		+	
$4 - x^2$		−		−	○	+		+	○	−	

$4 - x^2$ ifadesinin negatif, $x^2 + 3x - 4$ ifadesinin pozitif veya sıfıra eşit olduğu aralıklar tabloda gösterilmiştir. Ortak taranmış aralıklar eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini oluşturur.
Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $ÇK = (-\infty, -4] \cup (2, \infty)$ olur.

30. Örnek

$\left.\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ olduğundan denklemin kökleri $x_1 = 3$ veya $x_2 = -1$ olur.
$x + 4 = 0$ olduğundan denklemin kökü $x_3 = -4$ olur.
Bu köklerle ilgili işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		-4		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+		+	●	−	●	+	
$x + 4$		−	○	+		+		+	

$x + 4$ ifadesinin negatif, $x^2 - 2x - 3$ ifadesinin pozitif veya sıfıra eşit olduğu aralıklar tabloda gösterilmiştir. Ortak taranmış aralıklar eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini oluşturur.
Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi $ÇK = (-\infty, -4)$ olur.

Sıra Sizde

$\left.\begin{array}{r} x^2 - x - 12 \leq 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

1. Karesi kendisinden küçük olan sayıların değer aralığı .... olur.

2. $ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin daima pozitif değerler alması için .... ve .... olmalıdır.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olmak üzere $\Delta = 0$ ise ....olur.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

4. $(a > 0)$, $f(x) = ax + b > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ( ) olur.

5. $x^2 - 1 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ( ) olur.

6. $x^2 + 8x + 15 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ( ) olur.

7. $x^2 \cdot (x^2 - x + 1) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi ( ) olur.

a) $\{\,\}$

b) $(-1, 1)$

c) $\left(\frac{b}{a}, \infty\right)$

ç) $[-5, -3]$

d) $[3, 5]$

e) $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

8. $x^2 - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

9. 1 den n ye kadar olan doğal sayıların toplamı 28 den küçük olduğuna göre n nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

10. $2x^2 < 3 - x$ eşitsizliğininin çözüm kümesini bulunuz.

11. $\left.\begin{aligned} x^2 + 5x + y^2 &= 6 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

12. $\dfrac{3}{x^2 - 3x - 4} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

13. $\dfrac{-x \cdot (x - 4)}{x^2 - 9} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

14. Bir avcı bir hedefe art arda iki atış yapıyor. Avcının hedefi vurma olasılığı t olsun. Avcının iki atışta hedefi vuramama olasılığı, iki atışta da hedefi vurma olasılığının $\frac{1}{4}$ inden azdır.

a) Bu durumu ifade eden eşitsizlik sistemini yazınız.

b) t nin çözüm aralığını bulunuz.

15. Dünyada her yıl meydana gelen trafik kazalarının ortalama %13 ü özellikle aşırı hızdan ve hız kurallarını ihlalden kaynaklanmaktadır. Hız arttıkça durma mesafesi uzamakta, direksiyon hâkimiyeti azalmaktadır. Buna bağlı olarak sollama hataları ve çarpışma şiddetleri artmaktadır. V (m/sn.) hızıyla hareket eden bir aracın durma mesafesi (m) $X(v) = v + \frac{v^2}{5}$ denklemi ile ifade edilmektedir.
Buna göre yaya geçidine yaklaşan bir aracın 60 metreden kısa mesafede durabilmesi için hızının hangi aralıkta olması gerektiğini bulunuz.

16. Bir kontrol noktasından saatte 1800 den fazla araç geçtiğinde trafiğin bu noktada yoğun olduğu kabul edilir.
Bir trafik polisi 13.00 ile 18.00 saatleri arasında kontrol noktasından geçen araç sayısını zamana (sa.) bağlı olarak $y = f(x) = -2x^2 + 17x + 1765$ fonksiyonu ile modellemiştir. Buna göre hangi saatler arasında trafik yoğun olmaktadır?

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

17. $2x^2 - x - 6 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ B) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

C) $[2, \infty)$ D) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)$

E) $(-\infty, 2)$

18. $f(x) = -2x^2 + x + m - 1$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ olduğuna göre m nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

19. $\left.\begin{array}{r} x^2 - 2xy = 8 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$

denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\left(-\frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right), (2, -1)\right\}$ B) $\{(2, -1)\}$

C) $\left\{(-2, -3), \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$ D) $\left\{(2, 3), \left(\frac{13}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

E) $\{(2, -3), (3, -2)\}$

20. $\left.\begin{array}{r} \frac{x-5}{x+1} \leq 0 \\ \frac{2}{x-4} > 0 \end{array}\right\}$

eşitsizlik sistemini sağlayan kaç tam sayı değeri vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

21. $\left.\begin{array}{l} 3x - 6 \leq x^2 + x - 5 \\ x^2 + x - 5 < -1 - 2x \end{array}\right\}$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−1, 2] B) (−4, 1) C) (−4, 2]

D) [−1, 2] E) (−2, 3)

22. $(2x - 3)^2.(-x + 2) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left[-\frac{3}{2}, 2\right)$ B) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ C) $[2, \infty)$

D) $(-\infty, 2]$ E) $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$

23. $\frac{-x^2+9x-18}{x^2+1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3, 8) B) (3, 2] C) [3, 6]
D) [2, 9] E) [−2, 9]

24. $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ denkleminin reel kökü olmadığına göre m nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 16 B) 11 C) −2 D) 0 E) −3

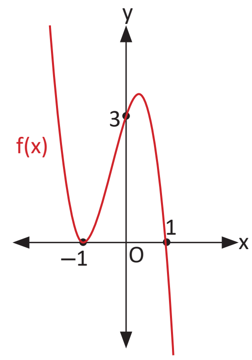
25. Ahmet Bey işe gitmek için farklı iki yol kullanmaktadır.
1. yolun uzunluğu $(x^2 + 4x + 10)$ metre,
2. yolun uzunluğu $(3x + 166)$ metredir.
Birinci yol ikinci yoldan kısa olduğuna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) −20 B) −16 C) −13 D) −12 E) −10

26. $x + 1 \geq \frac{12}{x}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

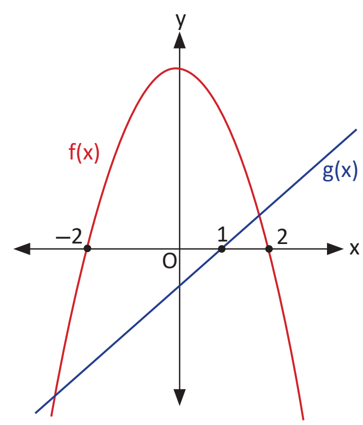
A) (−4, 3)
B) [−4, 1) ∪ [3, ∞)
C) (12, ∞)
D) (−∞, −4) ∪ (0, 3]
E) [−4, 0) ∪ [3, ∞)

27. Yanda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre $(2 - x) \cdot f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



A) (−1, 1) B) (−1, 2) C) (−2, −1)
D) (1, ∞) E) (1, 2)

28.



Yukarıdaki şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.
f fonksiyonunun grafiği x eksenini (−2, 0) ve (2, 0) noktalarında, g fonksiyonunun grafiği x eksenini (1, 0) noktasında kesmektedir.
$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [−2, 1) ∪ [2, ∞)
B) (−∞, 1) ∪ [2, ∞)
C) (−2, 2)
D) [−2, 2]
E) (−∞, −2] ∪ (1, 2]

GEOMETRİ

5. ÇEMBER VE DAİRE

Bu bölümde

- Çemberde teğet, kiriş, çap, yay ve kesen kavramlarını açıklamayı,
- Çemberde kirişin özelliklerini göstererek işlemler yapmayı,
- Bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmayı,
- Çemberde teğetin özelliklerini göstererek işlemler yapmayı,
- Dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturmayı

öğreneceksiniz.

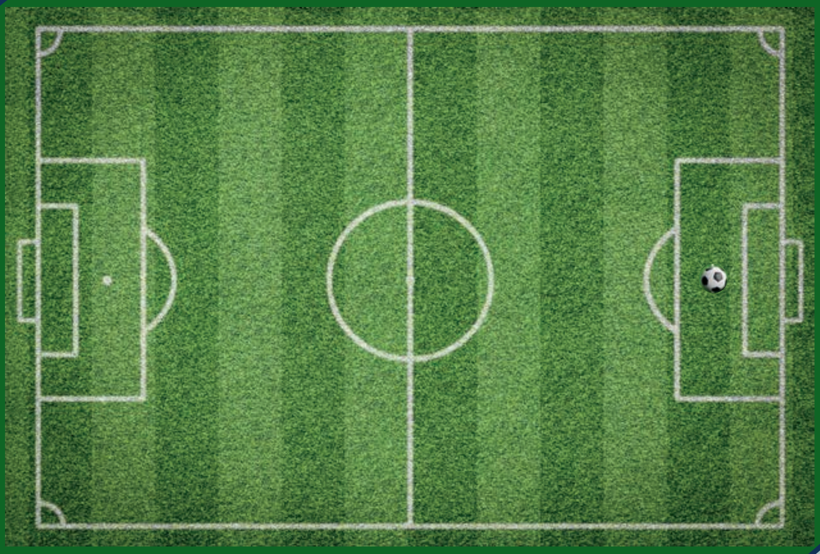


KAVRAMLAR

Çember, Merkez, Yarıçap, Çap, Kiriş, Kesen, Yay, Merkez Açı, Çevre Açı, Teğet-Kiriş Açı, İç Açı, Dış Açı, Teğet, Teğet Parçası, Yay Uzunluğu, Daire, Daire Dilimi

HAZIRLIK ÇALIŞMASI

Spor dallarının pek çoğunda oyun sahasının sınırlarını belirleyen ve oyun kurallarını uygulamaya yönelik çizgiler bulunur.
Bir futbol sahasında "orta yuvarlak" adı verilen bölge, dairesel bir alandır. Başlama noktası bu dairenin merkezidir.
Kale önündeki büyük dikdörtgene "ceza alanı", bu alanın dışındaki çizgiye "ceza yayı" denir. Aşağıdaki şekilde topun bulunduğu yer penaltı atışının yapıldığı noktadır.

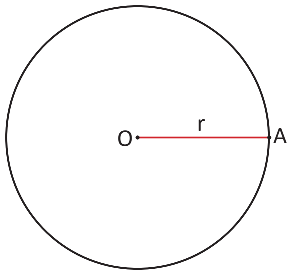


Bir futbol sahasında başlama vuruşunun yapıldığı noktanın orta yuvarlağa olan uzaklığı hangi kavramla ifade edilebilir?
Ceza yayı hangi geometrik şeklin bir parçasıdır ve futbol sahasına ne amaçla çizilmiş olabilir?
Orta yuvarlak (daire) hariç tüm çizgileri silinmiş bir futbol sahasında başlama noktası (merkez) nasıl bulunur?

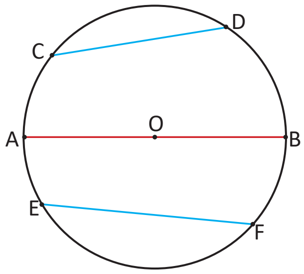
5.1. Çemberin Temel Elemanları

5.1.1. Çemberde Teğet, Kiriş, Çap, Yay ve Kesen

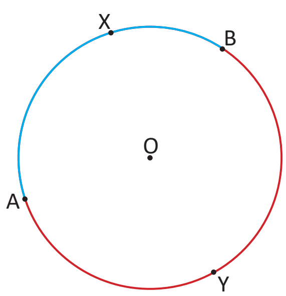
Düzlemdeki sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir. Sabit olan noktaya **çemberin merkezi (O)**, çemberin üzerindeki herhangi bir noktayı merkeze birleştiren doğru parçasına çemberin **yarıçap**ı denir. Merkez ve yarıçap çemberin temel elemanlarıdır.



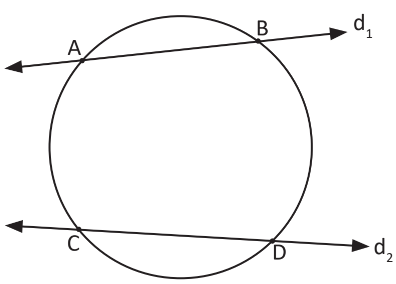
O merkezli çemberin üzerinde alınacak tüm A noktaları için [OA] çemberin yarıçapı olur. Bir çemberin çizilebilmesi için merkezinin ve yarıçapının bilinmesi yeterlidir. O merkezli ve yarıçap uzunluğu r olan çember Ç(O, r) şeklinde gösterilir.



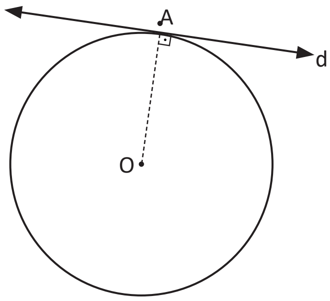
Çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına çemberin bir **kirişi,** merkezden geçen kirişe çemberin bir **çap**ı denir. Yandaki şekilde [CD] ve [EF] çemberin birer kirişidir. [AB] çemberin merkezinden geçtiği için çemberin bir çapıdır, aynı zamanda bu çemberin en uzun kirişidir ve çemberi iki eş parçaya ayırır.



Çemberde farklı iki nokta arasında kalan parçaya çemberin bir **yay**ı denir. Bir yay, iki uç noktası ile bunların arasındaki üçüncü bir nokta ile belirlenir. Şekildeki iki yay $\overset{\frown}{AXB}$ ve $\overset{\frown}{AYB}$ biçiminde gösterilir. Bununla beraber, küçük olan yay $\overset{\frown}{AXB}$ için $\overset{\frown}{AB}$ gösterimi kullanılabilir.



Çemberi farklı iki noktada kesen doğruya **çemberin keseni** denir. Yandaki şekilde d_1 ve d_2 doğruları çemberi iki farklı noktada kestiğinden bu doğrular çemberin kesenleridir.

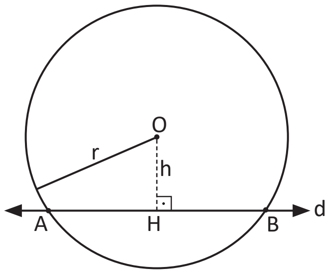


Çember ile yalnız bir ortak noktası bulunan doğruya **çemberin bir teğeti** denir.
Şekildeki çember ile d doğrusunun ortak noktası (A), teğetin değme noktasıdır.
Çemberin merkezi ile teğetin değme noktasını birleştiren doğru, teğete diktir.

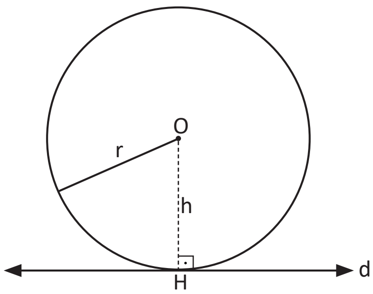
Bir Çember ile Bir Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları

Bir düzlemde çember ve doğrunun birbirlerine göre üç farklı durumu vardır.
O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu r ve merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı $|OH| = h$ olması durumunda:

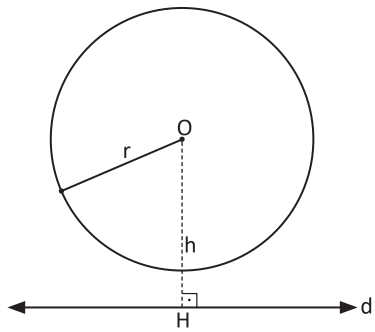
1. $h < r$ ise **doğru çemberi iki noktada keser.**



2. $h = r$ ise **doğru çembere teğettir.**



3. $h > r$ ise **doğru çemberi kesmez.**



1. Örnek

Bir çemberde x pozitif bir tam sayı olmak üzere yarıçap uzunluğu $(3x + 2)$ cm, merkezin bir d doğrusuna uzaklığı $(5x - 4)$ cm olarak veriliyor. d doğrusu ile çemberin ortak noktası olmadığına göre çemberin yarıçap uzunluğunun <u>en küçük</u> değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

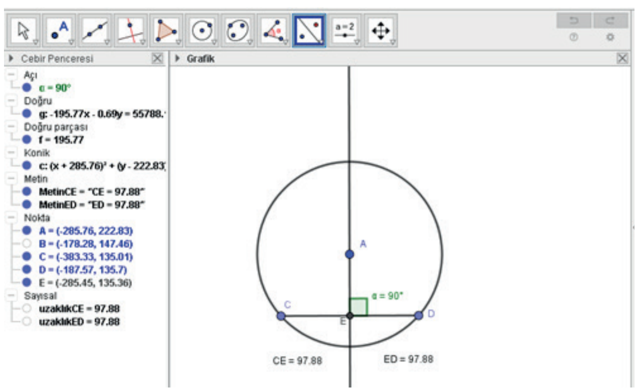
Çözüm

Çemberin yarıçap uzunluğu r, merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı h olsun. Çemberin d doğrusu ile bir ortak noktası olmadığına göre $h > r$ olmalıdır.
$5x - 4 > 3x + 2 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$
Yarıçap uzunluğunun değeri $3x + 2$ nin en küçük olması için x en küçük olmalıdır.
x tam sayı olduğuna göre $x = 4$ olur. O hâlde çemberin yarıçap uzunluğunun en küçük değeri $r = 3x + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$ cm olur.

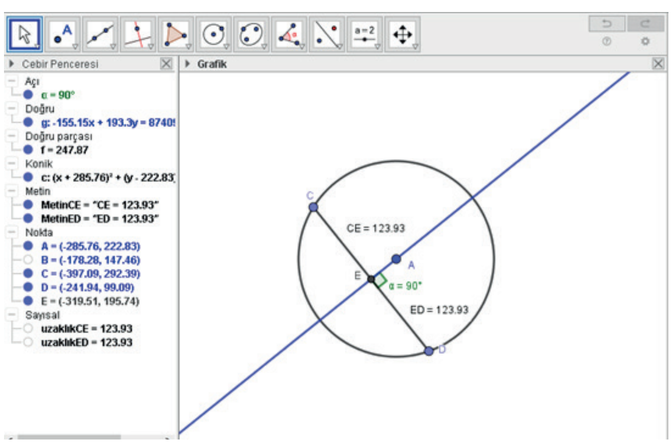
5.1.2. Çemberde Kirişin Özellikleri

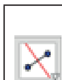
1. Uygulama: Çemberin Merkezinden Kirişe Dikme Çizme

Çember ikonuna tıklayarak A merkezli çemberi oluşturunuz.
Doğru parçası ikonuna tıkladıktan sonra çemberin üzerindeki farklı iki noktayı birleştirerek CD kirişini çiziniz.
Dik doğru ikonuna, ardından çemberin merkezine ve kirişe tıklayınız. Merkezden geçen ve kirişe dik olan doğru, otomatik olarak çizilir.
Kesiştir ikonuna, ardından kirişe ve doğruya tıklayarak doğru ile kirişin kesiştiği noktayı (E) belirleyiniz.
Açı ölçme ikonuna, ardından sırasıyla D, E, A noktalarına tıklayarak doğru ile kirişin arasındaki açının 90° olduğunu belirleyiniz.
Uzaklık/uzunluk ikonuna, ardından C ve E noktalarına tıklayarak CE doğru parçasının uzunluğunu belirleyiniz.
E ve D noktalarına tıklayarak ED doğru parçasının uzunluğunu belirleyiniz.



CE ve ED doğru parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.
Çemberde merkezden kirişe indirilen dikme, kirişi ortalar.
Çember ikonuna tıklayarak A merkezli çemberi oluşturunuz.
Doğru parçası ikonuna tıklayınız. Çemberin üzerindeki farklı iki noktayı birleştirerek CD kirişini çiziniz.
Orta dikme ikonuna, ardından CD kirişine tıkladığınızda kirişin orta noktasından ve çemberin merkezinden geçen doğru ekranda görülecektir.

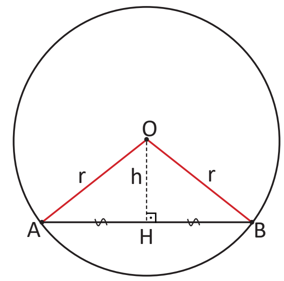



Orta dikme

Çemberde kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer.

Çemberde kirişin özellikleri dört adımda incelenecektir.

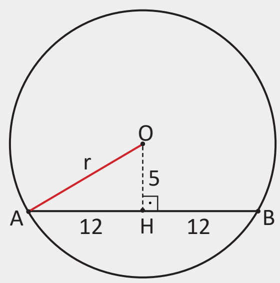
1. Bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme, kirişi ortalar.
Yandaki şekilde |AO| = |OB| olduğundan AOB ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgenin tepe noktasından indirilen dikme aynı zamanda kenarortay olduğundan |AH| = |HB| olur.



Bir çemberde kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçer. Bir kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru, kirişe dik olur.

2. Örnek

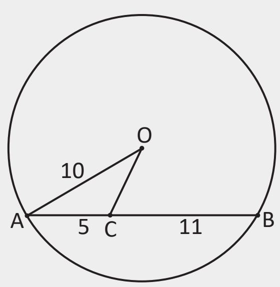
Bir çemberde 24 cm uzunluğundaki kirişin merkeze olan uzaklığı 5 cm olduğuna göre bu çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



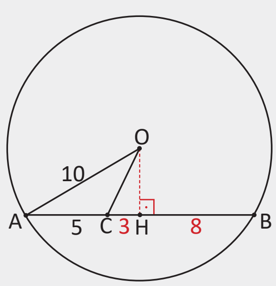
Çözüm

Yandaki O merkezli çemberde |AB|= 24 cm olacak şekilde bir [AB] kirişi çizilir. Çemberin merkezinden kirişe indirilen dikmenin ayağı H olmak üzere
|AH| = |HB| = 12 cm olur.
A noktası ile merkez birleştirilerek yarıçap elde edilir.
|OH| = 5 cm olduğuna göre oluşan AOH üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$r^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow r^2 = 169$
$\Rightarrow r = 13$ cm olur.

3. Örnek



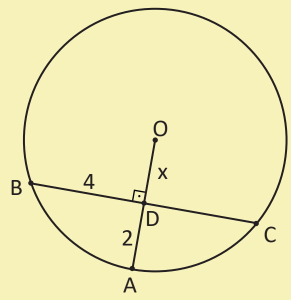
Yandaki O merkezli çemberde [AB] kiriş, |AO| = 10 cm, |AC| = 5 cm ve |CB| = 11 cm olduğuna göre OC uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

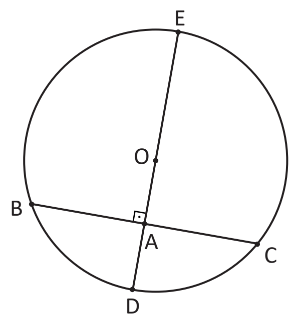
Yandaki şekilde çemberin merkezinden [AB] kirişine yükseklik çizildiğinde |AH| = |HB| = 8 cm olur.
AOH üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|OH|^2 + |AH|^2 = |AO|^2$
$|OH|^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow |OH| = 6$ cm olur.
COH üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|OH|^2 + |CH|^2 = |OC|^2$
$6^2 + 3^2 = |OC|^2 \Rightarrow |OC|^2 = 45 \Rightarrow |OC| = 3\sqrt{5}$ cm olur.

Sıra Sizde



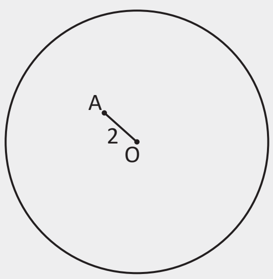
Yandaki O merkezli çemberde $[OA] \perp [BC]$, $|BD| = 4$ cm ve $|AD| = 2$ cm olduğuna göre $|OD| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

2. Bir çemberin içindeki herhangi bir noktadan geçen en kısa kiriş, o noktadan ve merkezden geçen doğruya dik olan kiriştir.

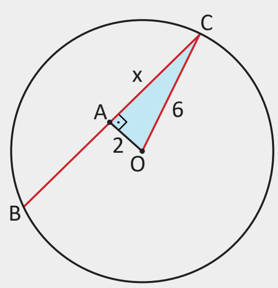


Yandaki O merkezli çemberde A noktasından geçen en kısa kiriş [BC] olur.
A noktasından geçen en uzun kiriş [DE] çapıdır.

4. Örnek



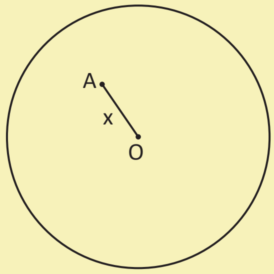
Yandaki O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu 6 cm ve $|OA| = 2$ cm olduğuna göre A noktasından geçen en kısa kirişin uzunluğunu bulunuz.



Çözüm

Yandaki çemberde OA doğru parçası A noktasından geçen en kısa kirişe diktir. A noktasından geçen en kısa kiriş [BC] olur.
$[OA] \perp [BC] \Rightarrow |BA| = |AC|$ olur.
$|AC| = x$ olmak üzere OAC üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında $x^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ cm olur. Buradan $|BC| = 2x = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ cm olur.

Sıra Sizde



Yandaki O merkezli çemberde A noktasından geçen en kısa kirişin uzunluğu 12 cm olarak veriliyor. Çemberin yarıçap uzunluğu 8 cm olduğuna göre $|OA| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Bir çemberde eş kirişlerin merkeze uzaklıkları eşittir.

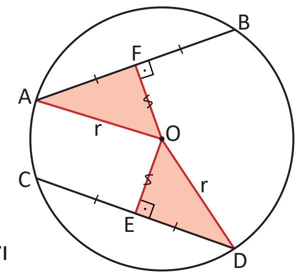
Yandaki O merkezli çemberde |AB| = |CD| olsun.

Çemberin merkezinden kirişlere indirilen dikme ayakları E ile F olmak üzere |AF| = |FB|= |CE| = |ED| olur.

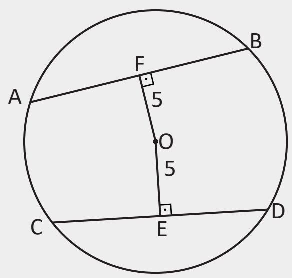
AFO ile DEO üçgenlerinin birer dik kenarları ve hipotenüsleri eşit olduğundan bu üçgenler birbirine eştir.

O hâlde |OF| = |OE| olur.

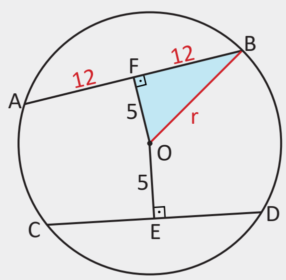
Bir çemberde merkeze eşit uzaklıkta bulunan kirişlerin uzunlukları birbirine eşittir.



5. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde |AB| = (3x + 3) cm, |CD| = (4x – 4) cm ve |OE| = |OF| = 5 cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

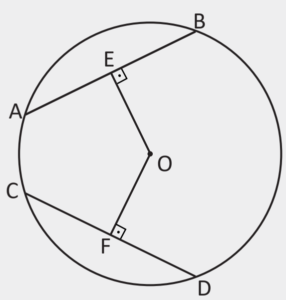
Yandaki çemberde [AB] ile [CD] kirişlerinin merkeze uzaklıkları |OF| ile |OE| eşit olduğundan |AB| = |CD| olur.

Buradan 3x + 3 = 4x – 4 ⇒ x = 7 cm olur.

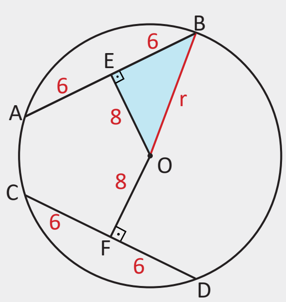
Bu değer |AB| = (3x + 3) cm eşitliğinde yerine yazıldığında |AB| = 3·7 + 3 = 24 cm ve |AF| = |FB| = 12 cm olur.

OFB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında $r^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow r = 13$ cm olur.

6. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde [OE]⊥[AB], [OF]⊥[CD], |AB| = |CD| = 12 cm, |OE| = (3x – 1) cm ve |OF| = (2x + 2) cm olduğuna göre çemberin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm

[AB] ve [CD] kirişlerine merkezden inilen dikmeler bu kirişleri ortaladığından ve

|AE| = |EB| = 6 cm

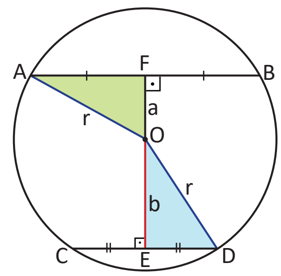
|CF| = |FD| = 6 cm

|OE| = |OF| olduğundan 3x – 1 = 2x + 2 ⇒ x = 3 cm olur.

|OE| = 3x – 1 = 3·3 – 1 = 8 cm olur.

OEB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında yarıçap uzunluğu $r^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow r = 10$ cm olur.

4. Bir çemberde iki kiriş merkezden eşit uzaklıkta değilse uzun olan kiriş merkeze daha yakındır.



Yandaki şekilde $|OF| = a$ ve $|OE| = b$ olsun.

$|AB| > |CD| \Rightarrow |AF| > |ED|$ (1)

$|AF|^2 + a^2 = r^2$ ve $|ED|^2 + b^2 = r^2$

$|AF|^2 = r^2 - a^2$ ve $|ED|^2 = r^2 - b^2$ (2)

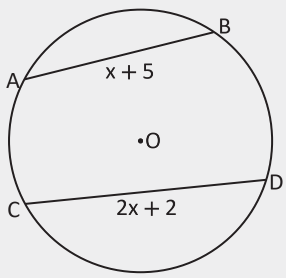
(1) ve (2) den

$r^2 - a^2 > r^2 - b^2$

$-a^2 > -b^2$

$a^2 < b^2$ olur. Buradan $a < b$ olur.

7. Örnek



Yarıçap uzunluğu 7 cm olan yandaki çemberde [AB] kirişi [CD] kirişine göre merkeze daha uzaktır. $|AB| = (x + 5)$ cm, $|CD| = (2x + 2)$ cm olduğuna göre x in değer aralığını bulunuz.

Çözüm

Çemberin yarıçap uzunluğu 7 cm olduğu için en uzun kiriş (çap) 14 cm olur.

$|AB| < |CD|$ olduğundan $x + 5 < 2x + 2 < 14$ olur. Buradan

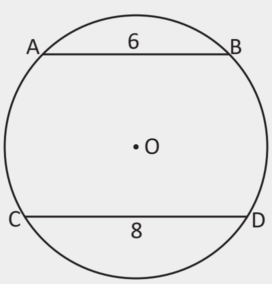
$x + 5 < 2x + 2$ ve $2x + 2 < 14$

$3 < x$ $2x < 12$

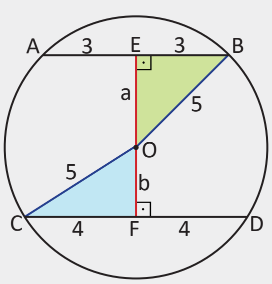
$x < 6$ olur.

O hâlde x in değer aralığı (3, 6) olur.

8. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde $|AB| = 6$ cm ve $|CD| = 8$ cm olarak veriliyor. [AB] // [CD] ve $r = 5$ cm olduğuna göre [AB] ile [CD] kirişleri arasındaki uzaklığı bulunuz.



Çözüm

Yandaki şekilde merkezden [AB] kirişine indirilen dikmenin uzunluğu a, [CD] kirişine indirilen dikmenin uzunluğu b olsun.

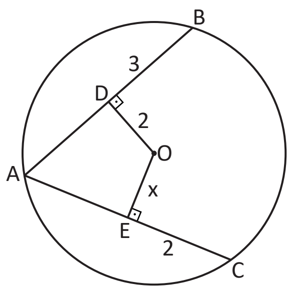
EOB ve COF üçgenleri özel üçgenler olduğundan $a = 4$ cm ve $b = 3$ cm olur.

İki kiriş arasındaki uzaklık

$|EF| = a + b = 4 + 3 = 7$ cm olur.

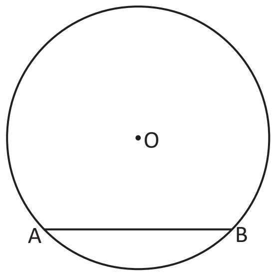
Alıştırmalar

1.



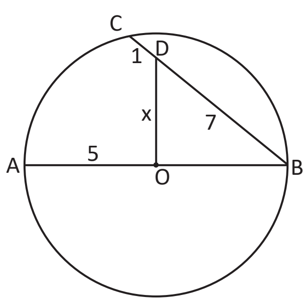
Yandaki O merkezli çemberde [OD]⊥[AB], [OE]⊥[AC], |OD| = |EC| = 2 cm ve |DB| = 3 cm verildiğine göre |OE| = x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

2.



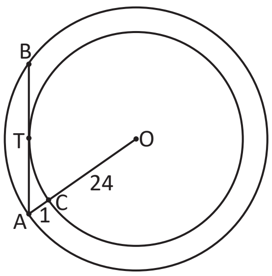
Yanda yarıçap uzunluğu 5 cm olan O merkezli çemberde [AB] kirişinin merkeze olan uzaklığı 3 cm olduğuna göre |AB| değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



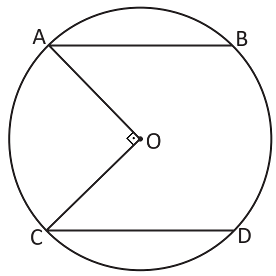
Yandaki O merkezli çemberde C, D, B noktaları doğrusal ve [AB] çaptır. |AO| = 5 cm, |CD| = 1 cm ve |DB| = 7 cm olduğuna göre |OD| = x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



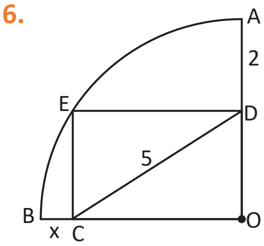
Yandaki O merkezli iki çemberde |OC| = 24 cm, |AC| = 1 cm verilmiştir. [AB] içteki çembere T noktasında teğettir. Buna göre |AB| = x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



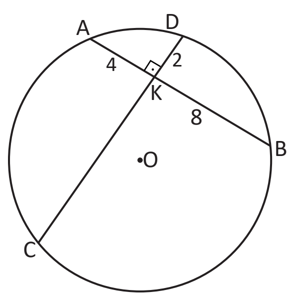
Yandaki O merkezli çemberde [AB] // [CD], [AO]⊥[OC] ve |AB| + |CD| = 18 cm olduğuna göre [AB] ile [CD] kirişleri arasındaki uzaklığın kaç cm olduğunu bulunuz.

6.



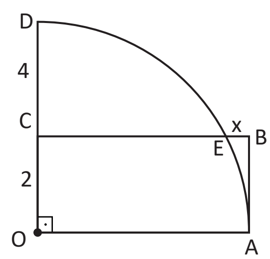
Yandaki O merkezli çeyrek çemberde CODE bir dikdörtgendir. |DC| = 5 cm ve |AD| = 2 cm olduğuna göre |BC| = x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

7.



Yandaki O merkezli çemberde [CD]⊥[AB], |AK| = 4 cm, |KB| = 8 cm ve |DK| = 2 cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

8.

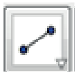
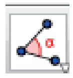


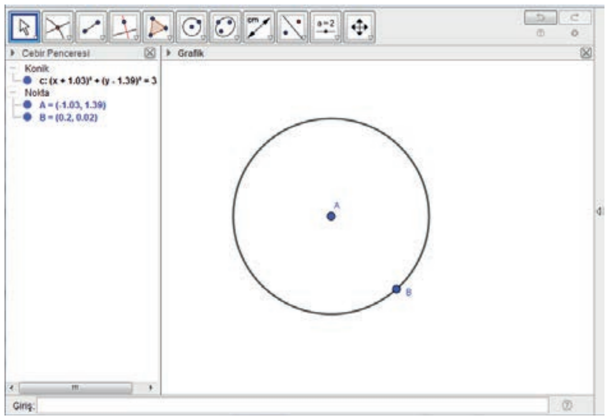
Yandaki şekilde O merkezli çeyrek çember ve OABC dikdörtgeni verilmiştir. |DC| = 4 cm ve |OC| = 2 cm olduğuna göre |EB| = x in kaç cm olduğunu bulunuz.

5.2. Çemberde Açılar

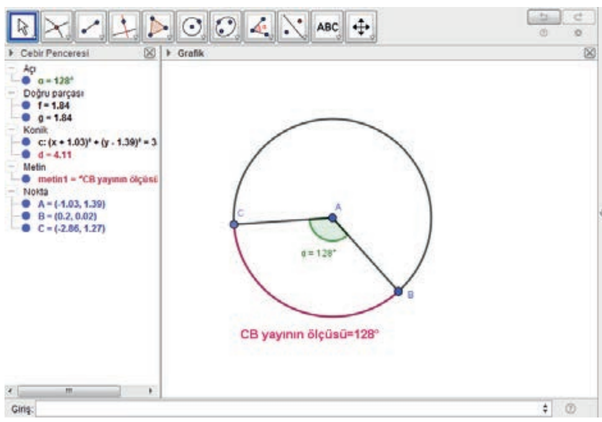
5.2.1. Bir Çemberde Merkez Açı, Çevre Açı, İç Açı, Dış Açı ve Teğet-Kiriş Açı

2. Uygulama: Çemberde Merkez Açı

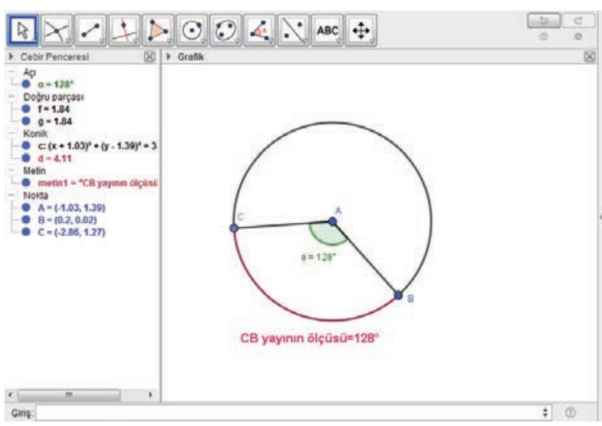
 Çember	 Doğru parçası	 Açı	 Metin



Çember ikonuna tıklandıktan sonra açılan seçeneklerde **merkez ve bir noktadan geçen çember** seçilir. İmleç, grafik penceresinde tıklanıp sürüklendiğinde A merkezli bir çember elde edilir. İmlecin bırakıldığı yerde, çemberin üzerinde bir B noktası oluşur. Cebir penceresinde çemberin denklemi ile A ve B noktalarının koordinatları görülecektir.



Doğru parçası ikonuna, ardından A ve B noktalarına tıklayarak AB doğru parçasını çiziniz. Yine A noktasına, ardından çember üzerinde herhangi bir yere tıklayarak AC doğru parçasını çiziniz.
Açı ikonuna tıkladıktan sonra çember üzerinde sırasıyla C, A, B noktalarını seçerek pozitif yönlü CAB merkez açısının ölçüsünü belirleyiniz.



Girişe yay yazdıktan sonra oluşan satırda **çember** bölümüne çemberin adı olan **c**, **nokta** bölümlerine **C** ve **B** yazınız. CB yayının rengi değişecektir. İmleci yayın üzerine getirip sağ tıklayınız. **Özellikler** sekmesinden yayın rengini seçebilirsiniz. Çemberin ismi cebir penceresinde **konik** başlığı altındadır.

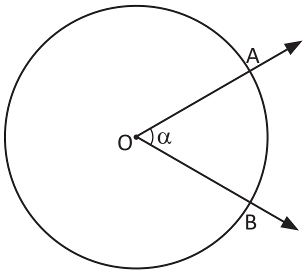
B noktasını hareket ettirerek merkez açının değişik durumlarını görebilirsiniz. Merkez açının ölçüsü ile bu açının gördüğü yayın ölçüsünün her durumda birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.

Bir çemberde merkez açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

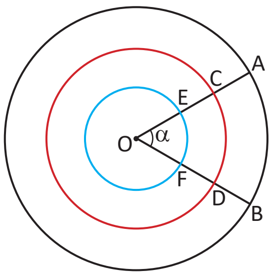
Merkez Açı

Köşesi çemberin merkezinde olan açıya çemberin bir **merkez açı**sı denir. Merkez açının özellikleri üç adımda incelenecektir.

1. Bir çemberde bir merkez açının ölçüsü bu merkez açının gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

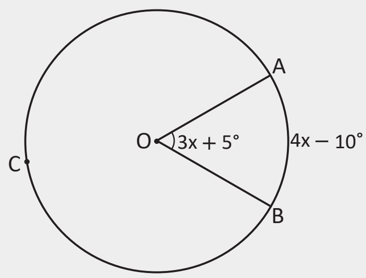


Yandaki şekilde ölçüsü α olan AOB açısı bir merkez açıdır.
AB yayı, AOB açısının gördüğü yaydır.



Merkezleri O olan üç çemberin merkez açılarının ölçüsü α olsun.
α, görmüş olduğu yay ölçülerine eşittir. Buna göre
dıştaki çember için $\alpha = m(\overset{\frown}{AB})$
ortadaki çember için $\alpha = m(\overset{\frown}{CD})$
içteki çember için $\alpha = m(\overset{\frown}{EF})$ olur.

9. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOB}) = 3x + 5°$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = 4x - 10°$ olduğuna göre ACB yayının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$\widehat{AOB}$ merkez açı olduğu için ölçüsü $\overset{\frown}{AB}$ nın ölçüsüne eşittir.

$4x - 10° = 3x + 5° \Rightarrow 4x - 3x = 5° + 10°$

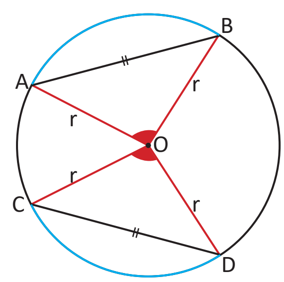
$\Rightarrow x = 15°$ olur.

Bu değer $m(\overset{\frown}{AB}) = 4x - 10°$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$m(\overset{\frown}{AB}) = 4 \cdot 15° - 10° = 50°$ olur. Buradan

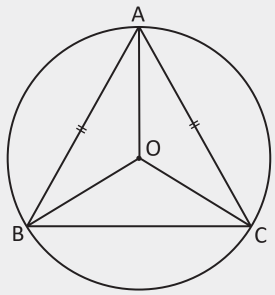
$m(\overset{\frown}{ACB}) = 360° - 50° = 310°$ olur.

2. Çemberde eş kirişlerin belirlediği yaylar eştir.



Yandaki çemberde $|AB| = |CD|$ olsun.
Çizilen yarıçaplarla oluşturulan $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{COD}$ eş üçgenlerdir (K.K.K.).
Dolayısıyla iki üçgenin tepe açıları eşittir.
Bir çemberde merkez açının ölçüsü, bu merkez açının gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD})$ olur.
O hâlde çemberde eş kirişlerin belirlediği yaylar eştir.

10. Örnek



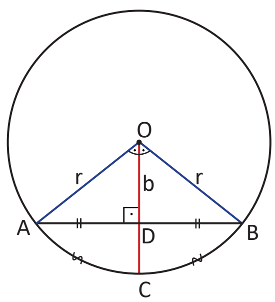
Yandaki şekilde köşeleri O merkezli çember üzerinde olan ABC ikizkenar üçgeninde |AB| = |AC| olarak veriliyor.
$m(\widehat{BC}) = 100°$ ve $m(\widehat{BOA}) = 3x + 10°$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

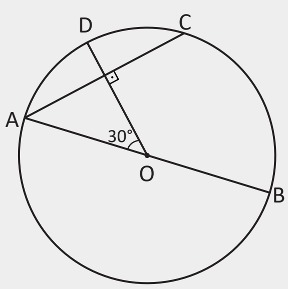
Yukarıdaki şekilde
$m(\widehat{BC}) = 100° \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 360° - 100° = 260°$ olur.
$|AB| = |AC|$ olduğundan $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC}) = \dfrac{260°}{2} = 130°$ olur.
$\widehat{BOA}$ merkez açı olduğundan bu açının gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.
$3x + 10° = 130° \Rightarrow 3x = 120°$
$\Rightarrow x = 40°$ olur.

3. Bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme bu kirişin gördüğü yayı ortalar.

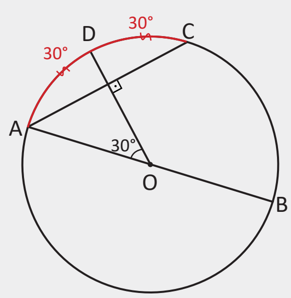
Yandaki O merkezli çemberde $\widehat{AOB}$ ikizkenar üçgen olduğundan merkezden AB kirişine indirilen dikme aynı zamanda üçgenin açıortayıdır.
AOC ve COB merkez açılarının ölçüleri eşit olduğundan
$m(\widehat{AC}) = m(\widehat{CB})$ olur.
O hâlde bir çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme bu kirişin gördüğü yayı ortalar.



11. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde [OD]⊥[AC] ve [AB] çaptır.
$m(\widehat{AOD}) = 30°$ olduğuna göre
$m(\widehat{CB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

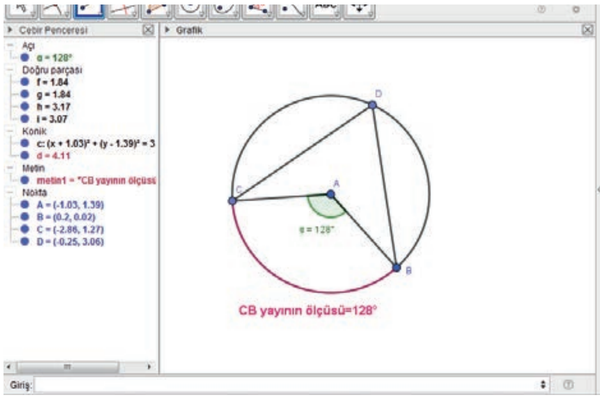


Çözüm

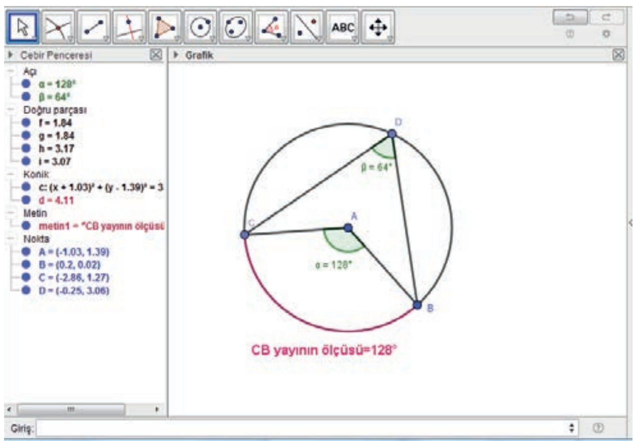
Yandaki çemberde AOD merkez açısı AD yayını gördüğünden $m(\widehat{AD}) = 30°$ olur.
OD dikmesi AC yayını ortalar.
$m(\widehat{AD}) = m(\widehat{DC}) = 30°$ olur.
$m(\widehat{ACB}) = 180°$ olduğundan
$m(\widehat{BC}) = 180° - (30° + 30°) = 120°$ olur.

3. Uygulama: Çevre Açı

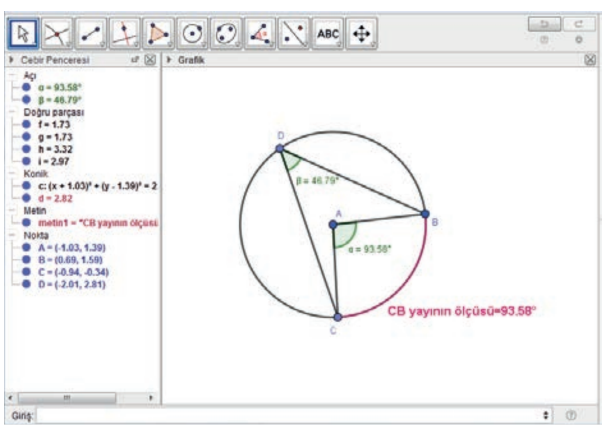
Bir önceki uygulamada elde ettiğiniz son görüntüden hareketle BD ve CD doğru parçalarını çizerek CDB çevre açısını oluşturunuz.



Açı ikonuna, ardından sırasıyla çember üzerindeki C, D, B noktalarına tıklayarak çevre açının ölçüsünü belirleyiniz.
Çevre açının, merkez açının ve CB yayının ölçüsü arasındaki ilişkiyi görmeye çalışınız.



B noktasını hareket ettirerek çevre açının, merkez açının ve BC yayının ölçüsü arasındaki ilişkinin bir önceki adımda olduğu gibi devam edip etmediğini tespit ediniz.



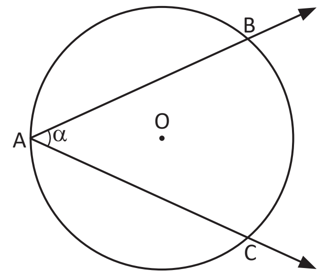
Çevre açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

Çevre Açı

Köşesi çemberin üzerinde olan ve kenarları çemberi kesen açıya çemberin bir **çevre açısı** denir. Çevre açının özellikleri dört adımda incelenecektir.

Yandaki şekilde ölçüsü α olan BAC açısı çevre açıdır.

$\overset{\frown}{BC}$, BAC açısının gördüğü yaydır.



1. Bir çemberde çevre açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

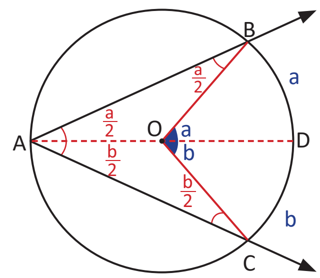
Yandaki şekilde O merkezli çemberde [AD] çap olmak üzere $m(\overset{\frown}{BD}) = a$ ve $m(\overset{\frown}{DC}) = b$ olsun. Buradan

$m(\widehat{BOD}) = a$ ve $(\widehat{DOC}) = b$ olur.

OAB ve OAC ikizkenar üçgen olduğundan

$m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = \frac{a}{2}$ ve $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = \frac{b}{2}$ olur.

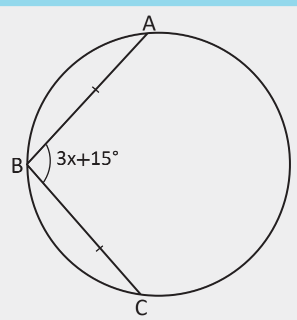
Buradan A çevre açısının ölçüsü $m(\widehat{A}) = \frac{a+b}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ olur.



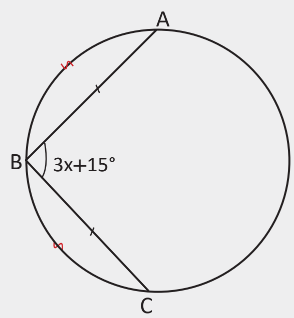
2. Bir çemberde çevre açının ölçüsü aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BOC})}{2} = \frac{a+b}{2}$ olur.

12. Örnek



Yandaki çemberde $|AB| = |BC|$, $m(\overset{\frown}{AB}) = 45°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 3x + 15°$ olduğuna göre x değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

Yandaki şekilde $|AB| = |AC|$ olduğundan

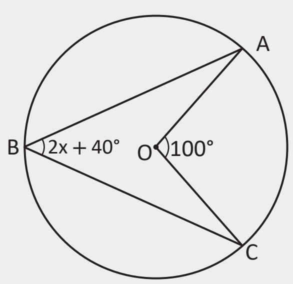
$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 45°$ olur.

$m(\overset{\frown}{AC}) = 360° - (45° + 45°) = 360° - 90° = 270°$ ve

$m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \frac{270°}{2} = 135°$ olur. Buradan

$m(\widehat{ABC}) = 3x + 15° = 135° \Rightarrow 3x = 120° \Rightarrow x = 40°$ olur.

13. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{AOC}) = 100°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2x + 40°$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

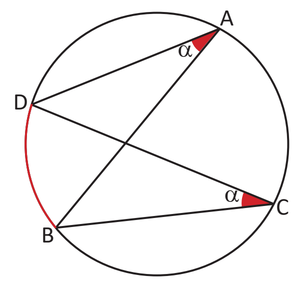
Yandaki şekilde $m(\overset{\frown}{AC}) = 100°$ olur. Buradan

$m(\widehat{ABC}) = 2x + 40° = \frac{100°}{2} = 50°$ olur.

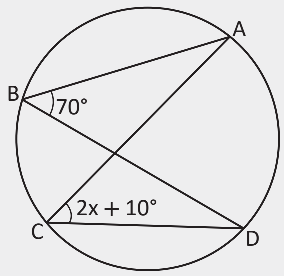
$2x + 40° = 50° \Rightarrow 2x = 10° \Rightarrow x = 5°$ olur.

Sonuç

Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir.
Yandaki şekilde $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$ olur.



14. Örnek



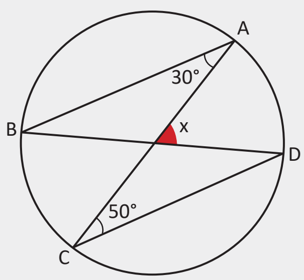
Yandaki çemberde $m(\widehat{ABD}) = 70°$ ve $m(\widehat{ACD}) = 2x + 10°$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

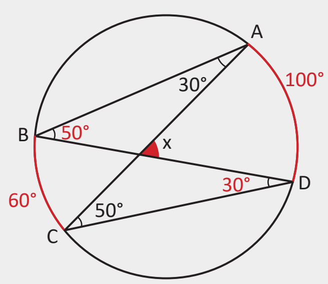
ABD ile ACD çevre açıları aynı yayı gördüğünden $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$ olur. Buna göre

$2x + 10° = 70° \Rightarrow 2x = 60° \Rightarrow x = 30°$ olur.

15. Örnek



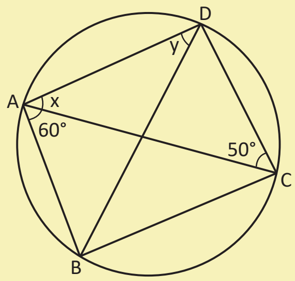
Yandaki çemberde $m(\widehat{BAC}) = 30°$ ve $m(\widehat{ACD}) = 50°$ olduğuna göre x değerini bulunuz.



Çözüm

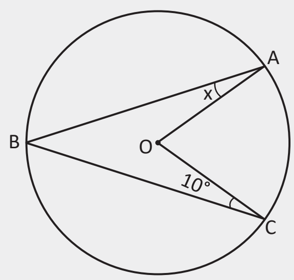
Yandaki çemberde BAC ve BDC çevre açıları aynı yayı görür ve bu açıların ölçüleri $\overset{\frown}{BC}$ nın ölçüsünün yarısına eşit olur.
ABD ve ACD çevre açıları aynı yayı görür ve bu açıların ölçüleri $\overset{\frown}{AD}$ nın ölçüsünün yarısına eşit olur.
$m(\widehat{ABD}) = 50°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 30°$ olduğundan
$x = 50° + 30° = 80°$ olur.

Sıra Sizde

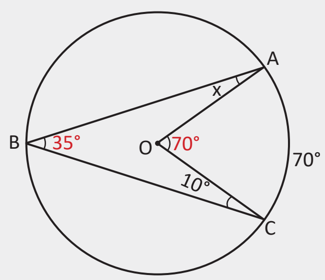


Yandaki çemberde $m(\overset{\frown}{BAC}) = 60°$, $m(\overset{\frown}{DCA}) = 50°$, $m(\overset{\frown}{ADB}) = y$ ve $m(\overset{\frown}{CAD}) = x$ olarak verilmiştir.
$x + y$ toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

16. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{AC}) = 70°$ ve $m(\overset{\frown}{OCB}) = 10°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{BAO})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



Çözüm

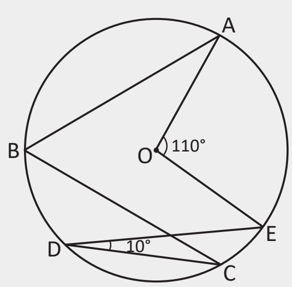
Yandaki çemberde $m(\overset{\frown}{AOC}) = 70°$ olur.

Çevre açının ölçüsü, bu çevre açının gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğundan

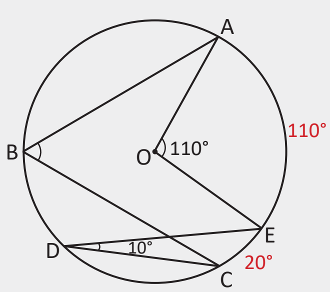
$m(\overset{\frown}{ABC}) = 35°$ olarak elde edilir.

$x + 35° + 10° = 70° \Rightarrow x + 45° = 70° \Rightarrow x = 25°$ olur.

17. Örnek



Yandaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{AOE}) = 110°$ ve $m(\overset{\frown}{EDC}) = 10°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

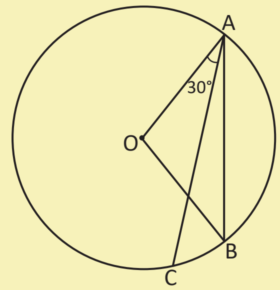


Çözüm

Yandaki şekilde
EDC çevre açının gördüğü yay EC yayıdır ve
$m(\overset{\frown}{EDC}) = 10°$ olduğundan $m(\overset{\frown}{EC}) = 2 \cdot 10° = 20°$ olur.
ABC çevre açının gördüğü yay AEC yayıdır ve bu yayın ölçüsü $110° + 20° = 130°$ olur.

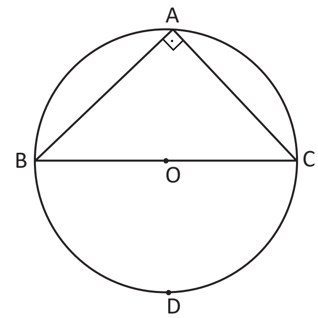
Buradan $m(\overset{\frown}{ABC}) = \dfrac{130°}{2} = 65°$ olur.

Sıra Sizde



Yandaki O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{CB}) = 40°$ ve $m(\widehat{OAC}) = 30°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

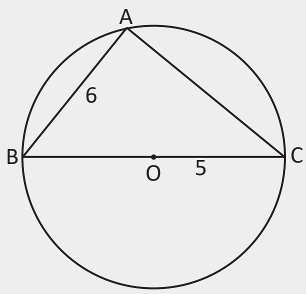
3. Bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olur.



Yandaki şekilde O merkezli çemberde çapı gören çevre açı A açısıdır. A açısı BDC çember yayını görmektedir.
O, çemberin merkezi olduğu için $m(\overset{\frown}{BDC}) = 180°$ olur.

Buradan $m(\widehat{A}) = \dfrac{180°}{2} = 90°$ olur.

18. Örnek

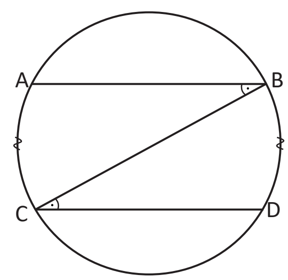


Yandaki [BC] çaplı, O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu $r = 5$ cm ve $|AB| = 6$ cm olduğuna göre AC uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

A çevre açısı çapı gördüğünden bu açının ölçüsü 90° olur.
$r = 5$ cm olduğundan ABC dik üçgeninde $|BC| = 10$ cm olur.
O hâlde ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$6^2 + |AC|^2 = 10^2 \Rightarrow |AC| = 8$ cm olur.

4. Bir çemberde paralel iki kirişin arasında kalan yayların ölçüleri birbirine eşittir.



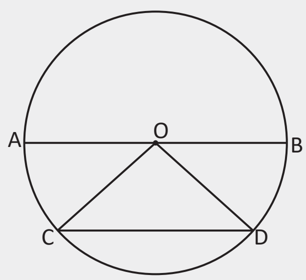
[AB] // [CD] olmak üzere CBA ve DCB açıları iç ters açılar olup

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD})$ olur.

Aynı çevre açının gördüğü yayların ölçüleri eşit olduğundan

$m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{BD})$ olur.

19. Örnek



Yandaki [AB] çaplı, O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{CD}) = 70°$ ve [AB] // [CD] olduğuna göre $m(\widehat{AOC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

[AB] // [CD] ise $m(\overset{\frown}{CA}) = m(\overset{\frown}{DB})$ olur.

$m(\overset{\frown}{CA}) = m(\overset{\frown}{DB}) = x$ olmak üzere

$2x + 70° = 180° \Rightarrow x = 55°$ olur.

Teğet-Kiriş Açı

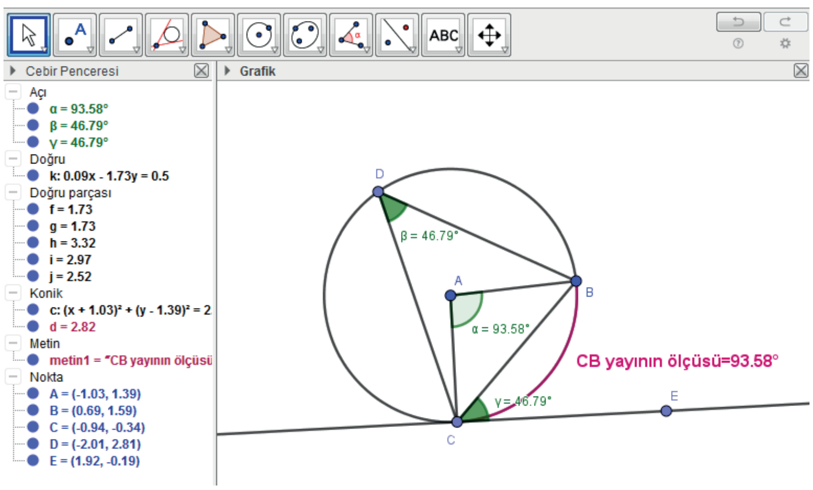
Köşesi çember üzerinde bulunan ve kenarlarından biri çemberin kirişi, diğeri çemberin teğeti olan açıya bu çemberin bir **teğet-kiriş açısı** denir.

4. Uygulama: Teğet-Kiriş Açı

	
Teğet	Nokta

Bir önceki uygulamada elde ettiğiniz son görüntüden hareketle BC doğru parçasını (kiriş) çiziniz.

Teğet ikonuna, ardından C noktasına ve çembere tıklayarak teğeti çiziniz.
Nokta ikonuna, ardından teğetin üzerine tıklayarak E noktasını oluşturunuz.
Açı ikonuna, ardından sırasıyla E, C, B noktalarına tıklayarak oluşan ECB teğet-kiriş açısının ölçüsünü belirleyiniz.



ECB teğet-kiriş açısının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir. Aynı yayı gören ECB teğet-kiriş açısının ölçüsü ile CDB çevre açısının ölçüsünün birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.

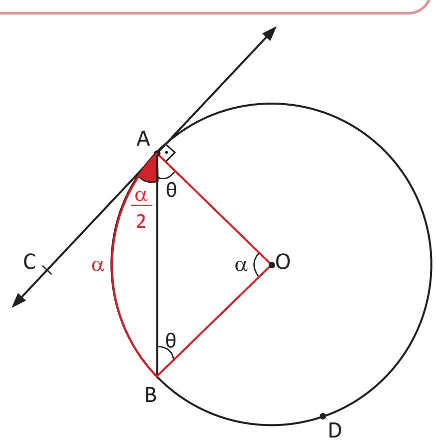
Yandaki şekilde CAB açısı çemberin bir teğet-kiriş açısıdır.
CAB açısının gördüğü yay AB yayıdır.
Çemberde OA ve OB doğru parçaları çizildiğinde OAB ikizkenar üçgeni elde edilir. $[OA]\perp[AC]$ olur. Merkez açının ölçüsü α olsun. Bu durumda $m(\widehat{AB}) = \alpha$ olur.

$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{OBA}) = \theta$ olsun. Bu durumda

OAB üçgeninde $2\theta + \alpha = 180°$ eşitliğinin her iki yanı

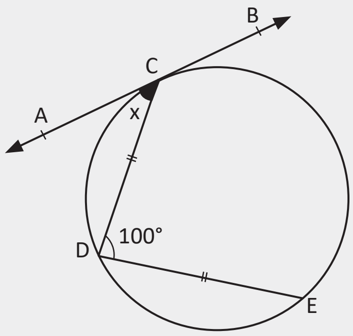
2 ye bölündüğünde $\theta + \frac{\alpha}{2} = 90°$ olur. Buna göre

CAB teğet-kiriş açısının ölçüsü $m(\widehat{CAB}) = \frac{\alpha}{2}$ olur.



O hâlde **teğet-kiriş açının ölçüsü, bu açının gördüğü yay ölçüsünün yarısına eşittir.**

20. Örnek



Yandaki şekilde AB doğrusu çembere C noktasında teğettir. $|CD| = |DE|$ ve $m(\overset{\frown}{CDE}) = 100°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACD}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

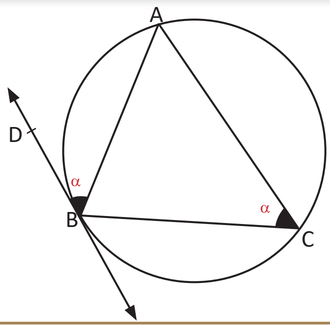
ACD teğet-kiriş açının ölçüsü x derece olduğundan bu açının gördüğü CD yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{CD}) = 2x$ olur.

$|CD| = |DE| \Rightarrow m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{DE}) = 2x$ ve $m(\widehat{CDE}) = 100° \Rightarrow m(\overset{\frown}{CE}) = 200°$ olur.

Verilen çemberde $m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{DE}) + m(\overset{\frown}{CE}) = 360°$ olduğundan

$2x + 2x + 200° = 360° \Rightarrow 4x = 160° \Rightarrow x = 40°$ olur.

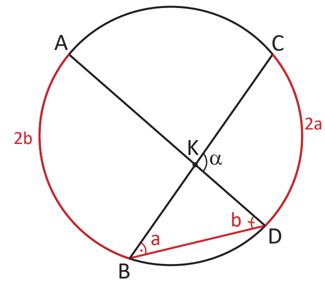
Sonuç



Bir çemberde aynı yayı gören teğet-kiriş açı ile çevre açının ölçüleri eşittir.
Yandaki şekilde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACB})$ olur.

İç Açı

Çemberin içinde herhangi bir noktada kesişen iki kirişin oluşturduğu açıların her birine bu çemberin bir **iç açı**sı denir.



Yandaki şekilde ölçüsü α olan DKC açısı çemberin iç açılarından biridir. DKC açısının gördüğü yaylar CD ve AB yaylarıdır.

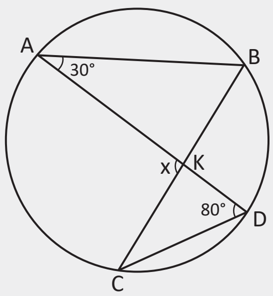
$m(\widehat{DBC}) = a$ ve $m(\widehat{ADB}) = b$ olsun. Buna göre

$m(\overset{\frown}{DC}) = 2a$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = 2b$ olur. Buradan

$\alpha = a + b = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})}{2}$ olur.

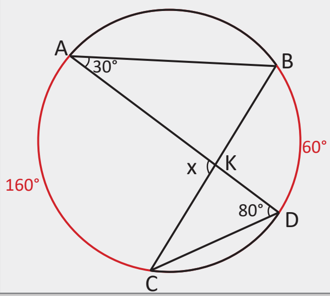
O hâlde **bir çemberde iç açının ölçüsü, bu açının gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.**

21. Örnek



Yandaki çemberde $[AD] \cap [BC] = \{K\}$, $m(\overset{\frown}{ADC}) = 80°$ ve $m(\overset{\frown}{BAD}) = 30°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AKC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

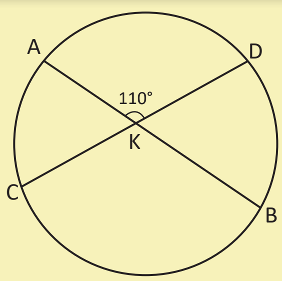
Çözüm



Yandaki şekilde BAD ve ADC çevre açılarının gördüğü yay ölçüleri sırasıyla $m(\overset{\frown}{BD}) = 60°$ ve $m(\overset{\frown}{AC}) = 160°$ olur.

Buradan $x = \dfrac{160° + 60°}{2} = \dfrac{220°}{2} = 110°$ olur.

Sıra Sizde

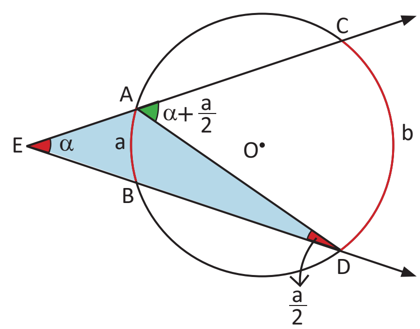


Yandaki çemberde $[AB] \cap [DC] = \{K\}$, $m(\overset{\frown}{AKD}) = 110°$ ve $m(\overset{\frown}{DB}) = 80°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Dış Açı

Bir çembere dışındaki noktadan çizilen iki kesenin, iki teğetin veya bir teğetle bir kesenin çemberin dışında oluşturduğu açıya çemberin **dış açısı** denir.

Yandaki şekilde DEC açısı bu çemberin bir dış açısıdır.
E açısının görmüş olduğu yaylar AB ve CD yaylarıdır.
A ve D noktaları birleştirilirse AB yayını gören çevre açı elde edilir.



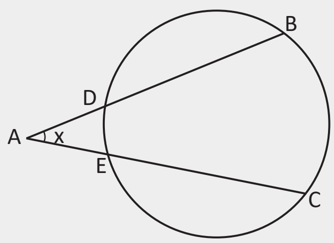
$m(\overset{\frown}{CED}) = \alpha$, $m(\overset{\frown}{AB}) = a$ ve $m(\overset{\frown}{CD}) = b$ olsun. $m(\overset{\frown}{AB}) = a$ olduğundan $m(\overset{\frown}{BDA}) = \dfrac{a}{2}$ olur.

AED üçgeninde $m(\overset{\frown}{CAD}) = \alpha + \dfrac{a}{2}$ olur. $\overset{\frown}{CAD}$ çevre açı olduğundan gördüğü yayın yarısına eşittir.

Buradan $\alpha + \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{b-a}{2}$ olur.

Bir dış açının ölçüsü, gördüğü yaylardan büyük olan açı ile küçük olan açının ölçüsünün farkının yarısına eşittir.

22. Örnek



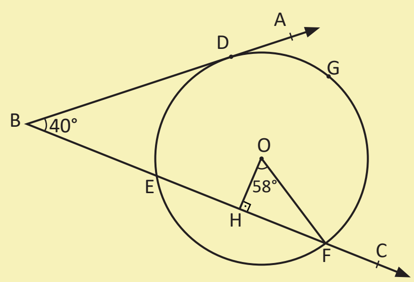
Yandaki çemberde $m(\overset{\frown}{DE}) = 30°$ ve $m(\overset{\frown}{BC}) = 80°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

BAC açısı bir dış açı olup ölçüsü gördüğü BC ve DE yaylarının ölçüleri farkının yarısıdır.

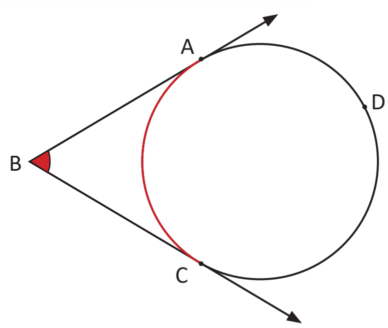
$$x = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{DE})}{2} = \frac{80° - 30°}{2} = 25° \text{ olur.}$$

Sıra Sizde



Yandaki O merkezli çemberde [BA, çembere D noktasında teğet, [BC, çemberi E ve F noktalarında kesmektedir.
$[OH] \perp [EC]$, $m(\widehat{ABC}) = 40°$ ve $m(\widehat{HOF}) = 58°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{DGF})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Sonuç



[BA ve [BC çembere sırasıyla A ve C noktalarında teğet olsun.

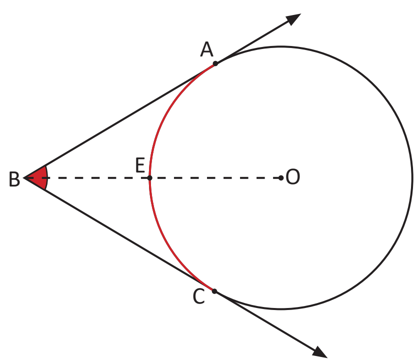
$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ADC}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ eşitliğinde

$m(\overset{\frown}{ADC}) = 360° - m(\overset{\frown}{AC})$ yazıldığında

$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{360° - m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ olur.

$m(\widehat{ABC}) = 180° - m(\overset{\frown}{AC})$ olduğundan

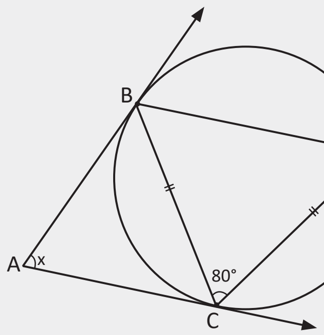
$m(\widehat{ABC}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 180°$ olur.



Yandaki O merkezli çemberde OB doğru parçası B açısını ve AC yayını iki eş parçaya böler.

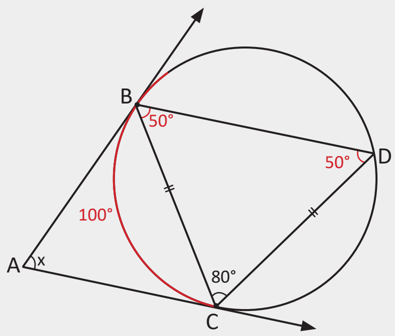
$m(\widehat{ABC}) + m(\overset{\frown}{AEC}) = 180°$ eşitliğinin her iki tarafı 2 ile bölündüğünde
$m(\widehat{ABO}) + m(\overset{\frown}{AE}) = 90°$ olur.

23. Örnek



Yandaki şekilde $|BC| = |CD|$ ve $m(\widehat{BCD}) = 80°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde

$\widehat{BCD}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CDB}) = 50°$ olur.

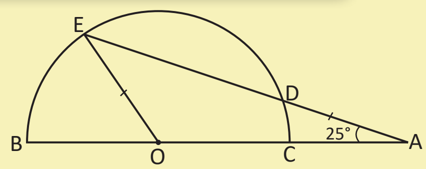
$\widehat{CDB}$ çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{BC}) = 100°$ olur.

A açısı, kolları çembere teğet bir dış açı olduğu için

$x + 100° = 180°$ olur. Buradan

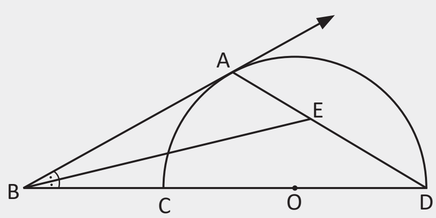
$m(\widehat{BAC}) = x = 80°$ olur.

Sıra Sizde



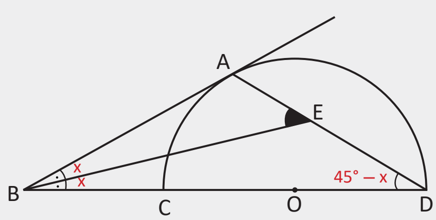
Yandaki O merkezli yarım çemberde $[BA] \cap [EA] = \{A\}$, $|AD| = |OE|$ ve $m(\widehat{EAC}) = 25°$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{BE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

24. Örnek



Yandaki O merkezli yarım çemberde [BA çembere A noktasında teğet; B, C, D noktaları ve A, E, D noktaları doğrusal olarak veriliyor. $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC})$ olduğuna göre $m(\widehat{AEB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde O merkezli çemberde

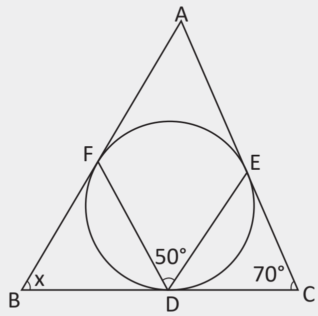
$m(\widehat{ABC}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 90°$ olur.

$m(\widehat{ABC}) = 2x$ olduğunda

$m(\overset{\frown}{AC}) = 90° - 2x$ olur ve $m(\widehat{D}) = 45° - x$ olur.

EBD üçgeninden $m(\widehat{AEB}) = x + 45° - x = 45°$ olur.

25. Örnek



Yandaki şekilde ABC üçgeninin kenarları çembere F, E, D noktalarında teğettir. $m(\widehat{FDE}) = 50°$ ve $m(\widehat{ACB}) = 70°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$m(\widehat{FE}) = 100°$ ve

$m(\widehat{A}) = 180° - m(\widehat{FE}) = 180° - 100° = 80°$ olur.

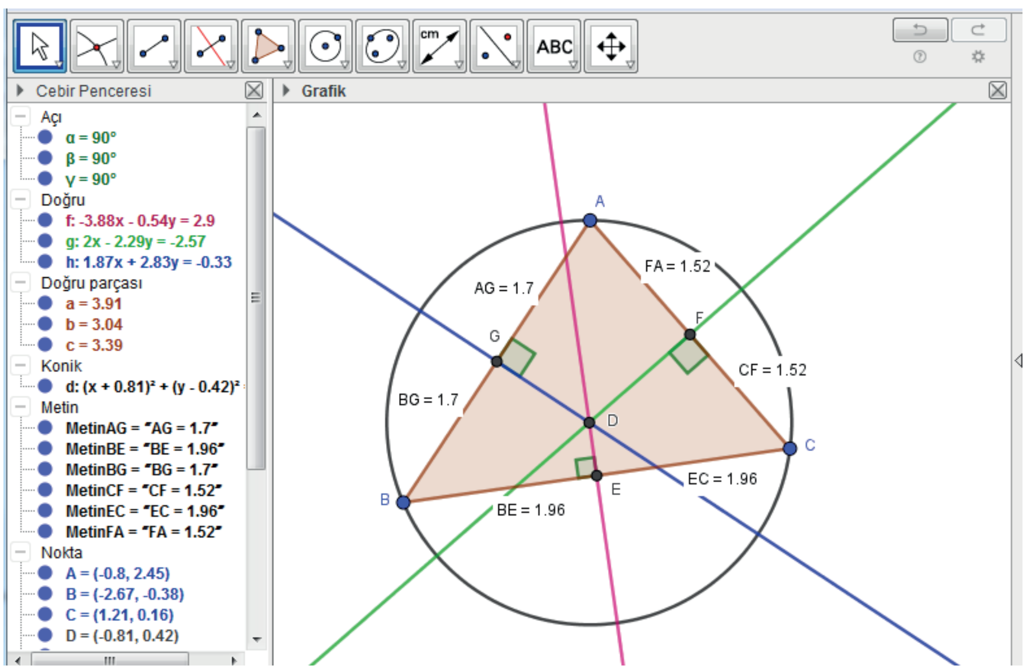
ABC üçgeninin iç açıları toplamı

$x + 70° + 80° = 180°$ olduğundan $x = 30°$ olur.

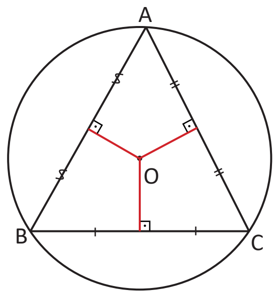
Çevrel Çember ve Sinüs Teoremi

5. Uygulama: Üçgenin Çevrel Çemberini Çizme

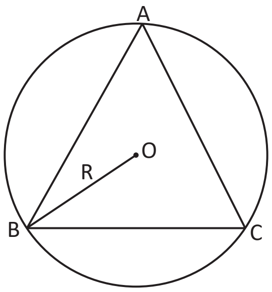
Çokgen ikonuna tıklayarak köşeleri A, B ve C noktaları olan üçgeni çiziniz.
Girişe çevrel çember yazdığınızda oluşan satırda **nokta** yerlerine **A,B,C** yazınız. Üçgenin çevrel çemberi ekranda görülecektir.
Girişe merkez yazdığınızda oluşan satırda **konik** yerine çemberin adı olan **d** yazınız. Çemberin merkezi D olarak görülecektir.
Orta dikme ikonuna, ardından üçgenin AB, AC ve BC kenarlarına tıklayarak bu kenarlara ait orta dikme doğrularını çiziniz. Orta dikme doğrularının çemberin merkezinden geçtiğine dikkat ediniz.



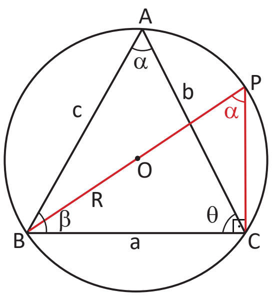
Bir üçgenin kenarlarının orta dikmesi üçgenin çevrel çemberinin merkezinden geçer.



Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere **üçgenin çevrel çemberi** denir. Yanda verilen ABC üçgeninin kenar orta dikmelerinin kesim noktası O olsun. Bu durumda |AO| = |BO| = |CO| olduğundan O, çevrel çemberin merkezidir.
Bir üçgenin kenar orta dikmeleri çevrel çemberin merkezinden geçer.



Yandaki şekilde O merkezli ve R yarıçaplı çember, ABC üçgeninin çevrel çemberidir. Çevrel çemberin yarıçapı R ile gösterilsin. Üçgenin kenarları, iç açıları ve çevrel çemberinin yarıçapı (R) arasındaki ilişki (sinüs teoremi) aşağıdaki gibi olur.



$m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$, $m(\widehat{C}) = \theta$; $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ olsun. Çember üzerinde bir P noktası alındığında [BP] kenarı merkezden geçen PCB üçgeni yandaki gibi çizilir. [BP] çap olduğundan $m(\widehat{PCB}) = 90°$ olur. A ile P açıları aynı yayı gördüğünden $m(\widehat{A}) = m(\widehat{P}) = \alpha$ olur.

PCB dik üçgeninde

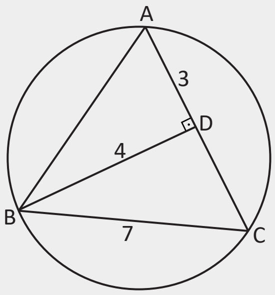
$\sin\alpha = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ olur.

Benzer şekilde

$2R = \dfrac{b}{\sin\beta}$ ve $2R = \dfrac{c}{\sin\theta}$ eşitlikleri yazılır. Buradan

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\theta} = 2R$ veya $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ elde edilir.

26. Örnek



Köşeleri çember üzerinde bulunan yandaki ABC üçgeninde [BD]⊥[AC], |BD| = 4 cm, |AD| = 3 cm ve |BC| = 7 cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

ABD dik üçgeni 3-4-5 özel üçgeni olduğundan |AB| = 5 cm olur.

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulandığında

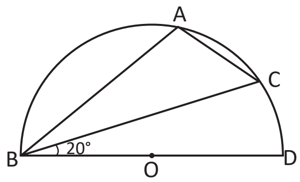
$\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = 2R \Rightarrow \dfrac{7}{\sin(\widehat{A})} = 2R$ olur.

ABD üçgeninde $\sin(\widehat{A}) = \dfrac{4}{5}$ olduğundan

$\dfrac{7}{\frac{4}{5}} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{35}{8}$ cm olur.

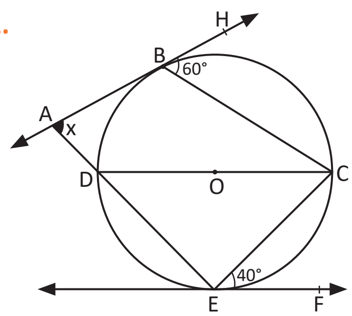
Alıştırmalar

1.



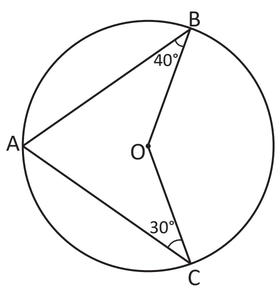
Yandaki O merkezli yarım çemberde $m(\widehat{CBD}) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



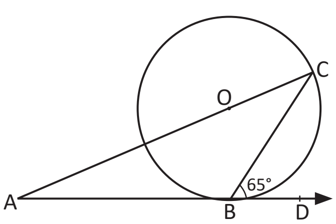
Yandaki şekilde AH ve EF, O merkezli çembere sırasıyla B ve E noktalarında teğettir. $m(\widehat{HBC}) = 60^\circ$ ve $m(\widehat{CEF}) = 40^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAE})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

3.



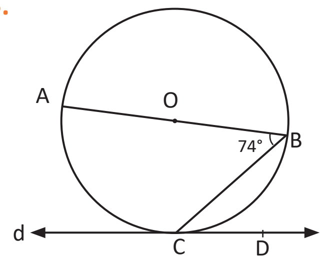
Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{ABO}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{ACO}) = 30^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{A})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



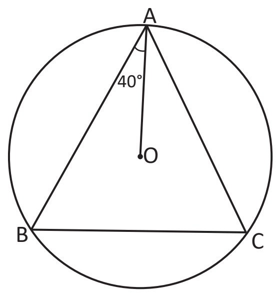
Yandaki O merkezli çemberde A, O, C noktaları doğrusal ve [AD çembere B noktasında teğettir. $m(\widehat{CBD}) = 65^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CAB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

5.



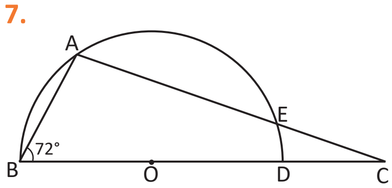
Yandaki O merkezli çemberde d doğrusu çembere C noktasında teğettir. $m(\widehat{ABC}) = 74^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BCD})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



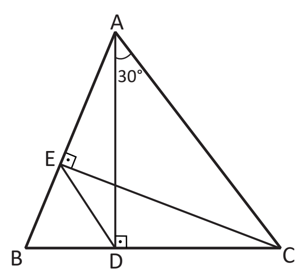
Yandaki O merkezli çemberde $m(\widehat{BAO}) = 40^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{C})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

7.



Yandaki O merkezli yarım çemberde $|BO| = |EC|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 72^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

8.

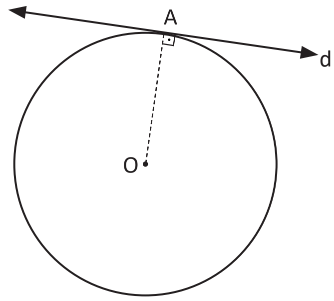


Yandaki ABC üçgeninde $m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$, $[AD] \perp [BC]$ ve $[EC] \perp [AB]$ olduğuna göre $m(\widehat{CED})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

5.3. Çemberde Teğet

5.3.1. Çemberde Teğetin Özellikleri

1. Çemberin merkezi ile teğetin değme noktasını birleştiren doğru, teğete diktir.
Teğete değme noktasından çizilen dikme çemberin merkezinden geçer.

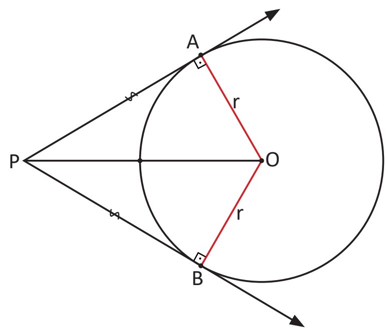


2. Bir çembere çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.
Yandaki şekilde çemberin dışındaki bir P noktasından O merkezli çembere A ve B noktalarında teğet olan [PA ve [PB çizilir. [PA] ve [PB] birer teğet parçasıdır. Buradan A, B, P noktaları O merkezi ile birleştirilerek $\widehat{AOP}$ ve $\widehat{BPO}$ elde edilir. Teğet, değme noktasında yarıçapa diktir ve bu dik üçgenlerin hipotenüsleri ortaktır. Her iki üçgende Pisagor teoremi uygulandığında

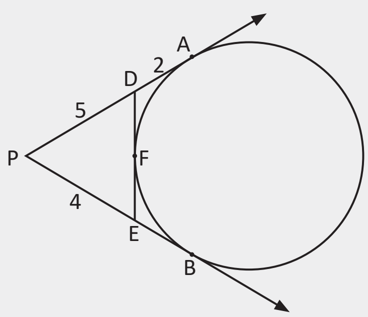
$|AP|^2 + r^2 = |OP|^2$

$|BP|^2 + r^2 = |OP|^2 \Rightarrow |AP| = |BP|$ olur.

O hâlde bir çembere çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

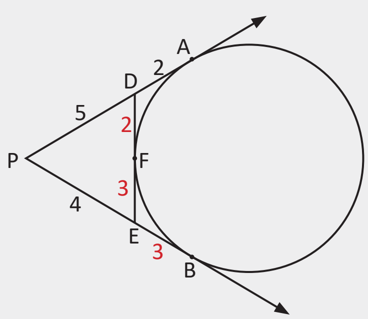


27. Örnek



Yandaki çemberde A, B, F teğetlerin değme noktalarıdır. P, D, A noktaları ve P, E, B noktaları doğrusaldır. $|PD| = 5$ cm, $|DA| = 2$ cm ve $|PE| = 4$ cm olduğuna göre DE uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan

$|PA| = |PB| = 7$ cm $\Rightarrow |EB| = 3$ cm olur.

$|EB| = |EF| = 3$ cm ve

$|DA| = |DF| = 2$ cm olur.

$|DE| = |DF| + |FE| = 3 + 2 = 5$ cm olur.

6. Uygulama: Dışındaki Bir Noktadan Çembere Teğet Çizme



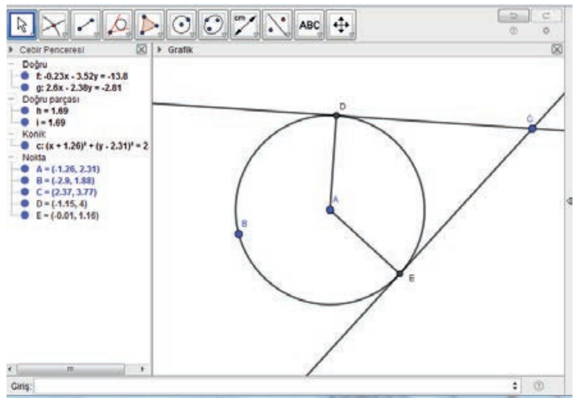
Uzaklık/Uzunluk

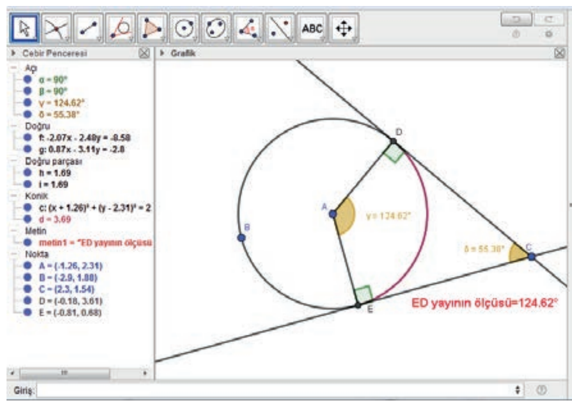
Çember ikonuna tıklayarak A merkezli çemberi ve çemberin üzerinde B noktasını oluşturunuz.
Nokta ikonuna tıklayarak çemberin dışında bir C noktası oluşturunuz.
Teğet ikonuna, ardından C noktasına ve çembere tıklayınız. C noktasından geçen, değme noktaları D ve E olan iki teğet çiziniz.
Doğru parçası ikonuna tıklayarak A noktasını teğetlerin değme noktasına birleştiren AD ve AE yarıçaplarını çiziniz.
Açı ikonuna, ardından sırasıyla A, D, C ve C, E, A noktalarına tıklayarak değme noktalarındaki açıları belirginleştiriniz.
Açı ikonuna, ardından sırasıyla D, C, E ve E, A, D noktalarına tıklayarak değme noktalarındaki açıları belirginleştiriniz.

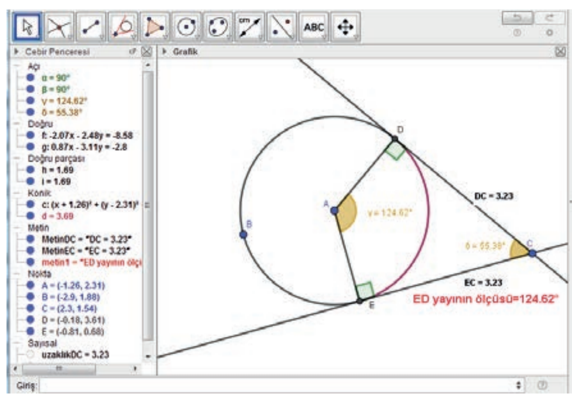
Merkez noktası ile teğetin değme noktasını birleştiren AD ve AE yarıçaplarının teğete dik olduğuna,
merkez açı ile DCE dış açısının ölçüleri toplamının 180° olduğuna,
DE yayının ölçüsü ile DCE dış açısının ölçüleri toplamının 180° olduğuna dikkat ediniz.

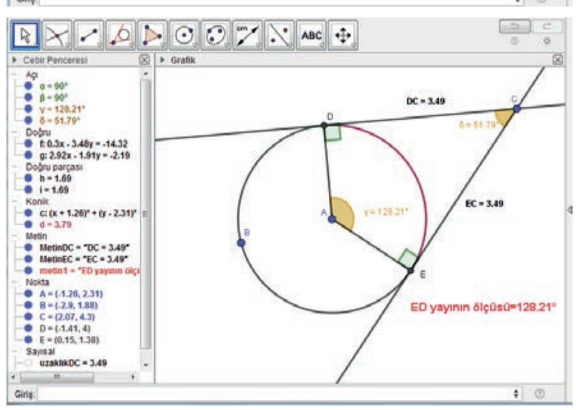
Uzaklık/Uzunluk ikonuna, ardından D ve C noktalarına tıklayarak DC teğet parçasının uzunluğunu; E ve C noktalarına tıklayarak EC teğet parçasının uzunluğunu belirleyiniz. DC ile EC teğet parçasının uzunluklarının birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.

C noktasına tıklayarak imleci sürüklediğinizde yukarıda bahsedilen özelliklerin korunduğuna dikkat ediniz.

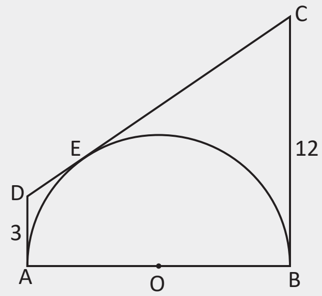




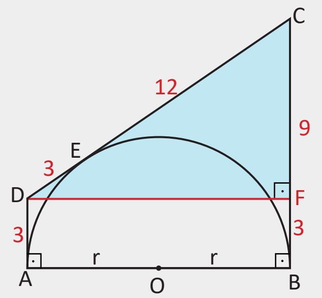




28. Örnek



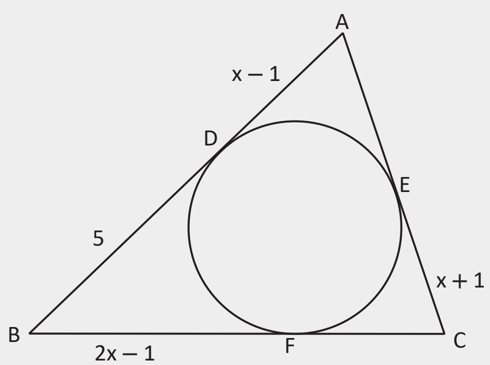
Yandaki |AO|= r yarıçaplı, O merkezli yarım çemberde A, E, B noktaları teğetlerin değme noktalarıdır. |BC| = 12 cm ve |DA| = 3 cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



Çözüm

Yandaki şekilde [AB] çapı teğete değme noktasında dik olduğundan [OA]⊥[DA] ve [OB]⊥[CB] olur.
Çembere C ve D noktalarında çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan |CB| = |CE|= 12 cm ve |DA| = |DE|= 3 cm olur.
[DF]⊥[CB] çizildiğinde DFC üçgeni 9–12–15 özel üçgeni olur. ABFD dikdörtgen olup |DF| = |AB| = 2r olur.
|DF| = 2r = 12 cm ⇒ r = 6 cm olarak bulunur.

29. Örnek

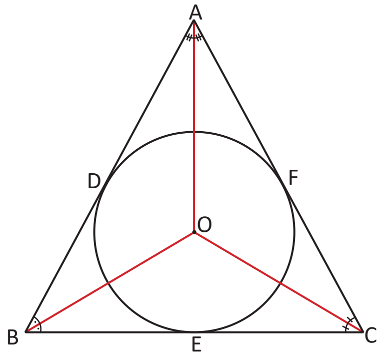


Yandaki şekilde D, E ve F noktaları ABC üçgeninin iç teğet çemberinin değme noktalarıdır.
|AD| = (x – 1) birim, |BD| = 5 birim,
|BF| = (2x – 1) birim ve |CE| = (x + 1) birim olduğuna göre ABC üçgeninin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

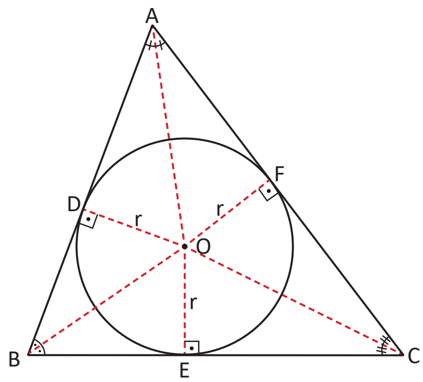
Çözüm

Yukarıdaki şekilde
|BD| = |BF| ⇒ 2x – 1 = 5 ⇒ 2x = 6 ⇒ x = 3 birim,
|AD| = |AE| = x – 1 ⇒ |AD| = 3 – 1 = 2 birim,
|EC| = |FC| = x + 1 ⇒ |CE| = 3 + 1 = 4 birim olur. Buradan
Ç(ABC) = |AD| + |DB| + |BF| + |FC| + |CE| + |AE|
= 2 + 5+ 5 + 4 + 4 + 2 = 22 birim olur.

Üçgenin İç Teğet Çemberi

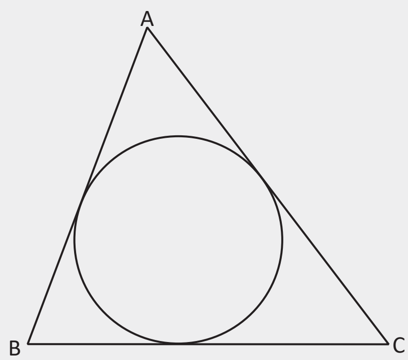


Yandaki şekilde yer alan çember ABC üçgenine D, E, F noktalarında teğettir.
Bir üçgenin üç kenarına da teğet olan çembere **üçgenin iç teğet çemberi** denir.



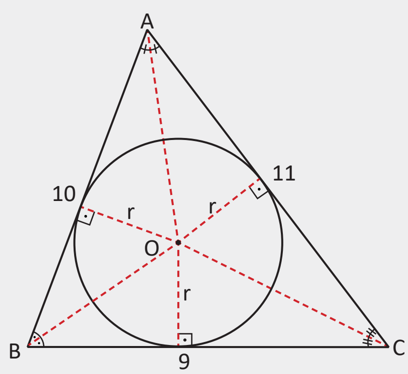
Yandaki şekilde çizilen açıortaylar O noktasında kesişir. Açıortay üzerinden kenarlara indirilen dikme uzunlukları birbirine eşit olduğundan
$|OD| = |OE| = |OF| = r$ olur.
İç teğet çemberinin merkezi üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.
$|AD| = |AF|$, $|BD| = |BE|$, $|CE| = |CF|$ olur.

30. Örnek



Şekildeki ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğu $2\sqrt{2}$ cm olarak verilmiştir. $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 9$ cm ve $|AC| = 11$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



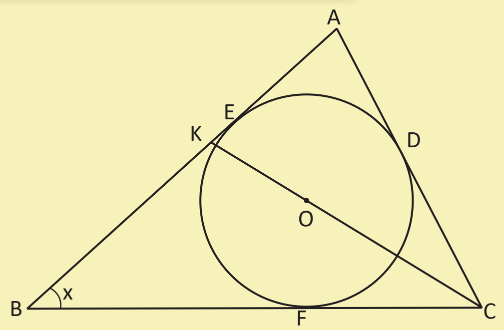
İç açıortayların kesim noktası iç teğet çemberinin merkezidir. Çemberin merkezi olan O noktası ile AB, AC, BC kenarlarının değme noktaları birleştirildiğinde yarıçap elde edilir. Buradan

$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{AOB}) + A(\widehat{BOC}) + A(\widehat{AOC})$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\cdot 10}{2} + \frac{2\sqrt{2}\cdot 9}{2} + \frac{2\sqrt{2}\cdot 11}{2}$$

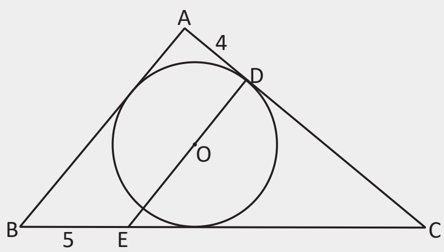
$$= 15\cdot 2\cdot \sqrt{2} = 30\cdot\sqrt{2}\ \text{cm}^2 \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

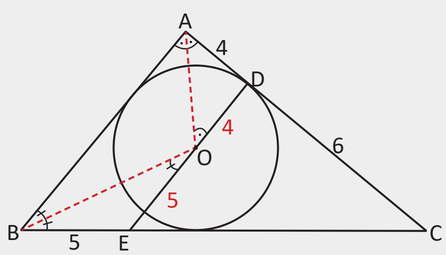


Yandaki şekilde ABC üçgeninin O merkezli iç teğet çemberi bu üçgene D, E, F noktalarında teğettir. |AC| = |CK| = |KB| olduğuna göre $m(\widehat{KBC}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

31. Örnek



Yandaki şekilde O, ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir.
[DE] // [AB], |AC| = 10 birim, |AD| = 4 birim ve |BE| = 5 birim olduğuna göre |AB| = x değerinin kaç birim olduğunu bulunuz.



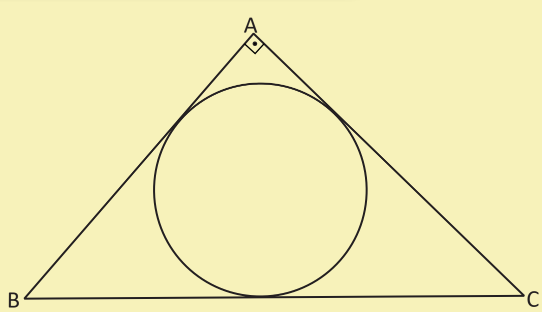
Çözüm

İç teğet çemberi özelliğinden [OA] ve [OB] açıortaydır.
[DE] // [AB] olduğu için BAO ve AOD iç ters açıları ile ABO ve BOE iç ters açıları oluşur. BEO ve ADO ikizkenar üçgenlerinden |AD| = |OD| = 4 birim ve |OE| = |BE|= 5 birim olur.
DCE ve ACB benzer üçgenlerinden

$\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$ olur. O hâlde

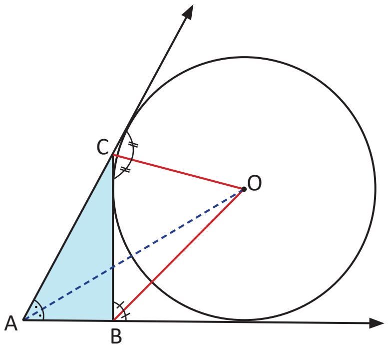
$\frac{6}{10} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 15$ birim olarak bulunur.

Sıra Sizde



Yandaki şekilde ABC dik üçgeninin iç teğet çemberi verilmiştir.
|AB| = 6 birim ve |AC| = 8 birim olduğuna göre A noktasının çembere olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

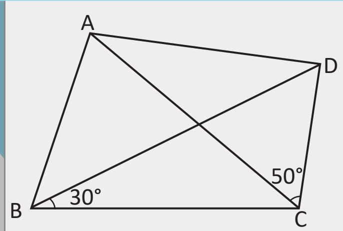
Üçgenin Dış Teğet Çemberleri



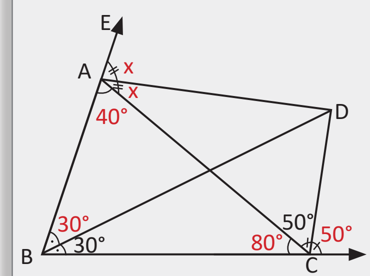
Üçgenin bir kenarına ve diğer iki kenarının uzantısına teğet olan çembere bu üçgenin bir **dış teğet çember**i denir.

Bir üçgenin herhangi bir açısının iç açıortayı ile diğer iki açısının dış açıortayı aynı noktada kesişir.
Yandaki şekilde bu nokta (O), ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir.

32. Örnek



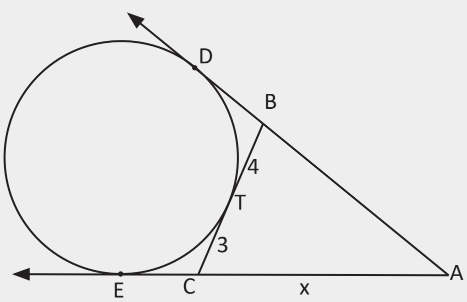
Şekildeki ABC üçgeninde D noktası dış teğet çemberin merkezidir. $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ACD}) = 50^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



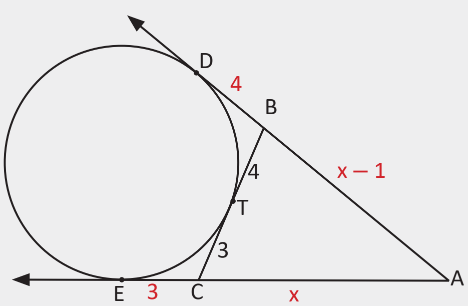
Çözüm

D noktası dış teğet çemberin merkezi olduğundan [CD] ve [AD] ABC üçgeninin dış açıortayları, [BD] iç açıortayıdır.
$m(\widehat{ACB}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ olur.
$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{DAE}) = x$ olsun. Buna göre
$40^\circ + 2x = 180^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$ olur.

33. Örnek



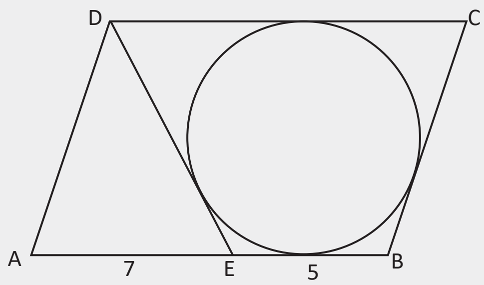
Yandaki şekilde ABC üçgeninin dış teğet çemberlerinden biri verilmiştir.
$Ç(\widehat{ABC}) = 24$ birim, $|BT| = 4$ birim ve
$|TC| = 3$ birim olduğuna göre
$|AC| = x$ değerinin kaç birim olduğunu bulunuz.



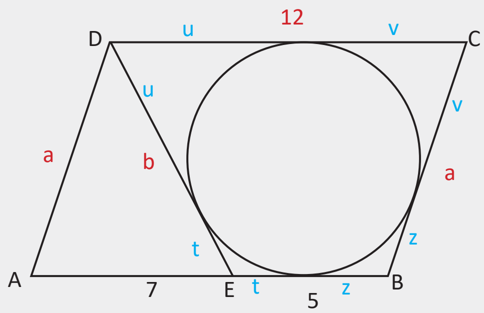
Çözüm

Yandaki şekilde $|BT| = |BD| = 4$ birim,
$|TC| = |EC| = 3$ birim ve
$|AD| = |EA| \Rightarrow |AB| = (x - 1)$ birim olur.
$Ç(\widehat{ABC}) = 24$ birim olduğuna göre
$x - 1 + x + 7 = 24$
$2x + 6 = 24$
$x = 9$ birim olur.

34. Örnek



Yandaki şekilde EBCD dörtgeninin kenarları çembere teğettir.
ABCD paralelkenar, $|EB| = 5$ birim ve $|AE| = 7$ birim olduğuna göre DAE üçgeninin çevresinin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

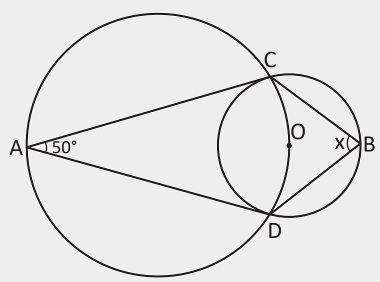


Çözüm

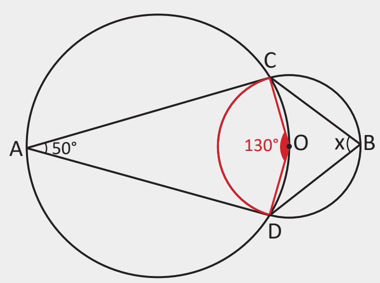
Yandaki ABCD paralelkenarında
$|AD| = |BC| = a$ birim, $|DE| = b$ birim olsun.
$|AB| = |DC| = 12$ birim olur.
EBCD dörtgeninde
$|DE| + |BC| = |EB| + |CD| = u + v + z + t$
$a + b = 5 + 12 = 17$ birim olur.
$Ç(\widehat{ADE}) = |AD| + |DE| + |AE|$

$= a + b + 7 = 17 + 7 = 24$ birim olur.

35. Örnek



Yandaki şekilde iki çember C, D noktalarında kesişmekte ve büyük çember O merkezli küçük çemberin merkezinden geçmektedir. $m(\widehat{CAD}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{CBD}) = x$ değerini bulunuz.



Çözüm

Yandaki şekilde C ve D noktalarıyla O merkezi birleştirildiğinde büyük çemberde ADOC dörtgeni elde edilir. Büyük çemberde COD ile CAD yaylarının ölçüleri toplamı 360° olduğundan CAD ve COD çevre açılarının ölçüleri toplamı 180° olur. Buradan
$m(\widehat{COD}) = 130°$ olur.
COD açısının köşesi küçük çemberin merkezinde olduğundan bu açının ölçüsü küçük çemberde gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. Böylece

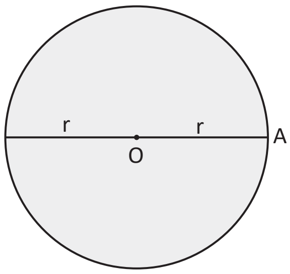
$m(\overset{\frown}{CD}) = 130°$ ve

$$m(\widehat{CBD}) = \frac{m(\overset{\frown}{CD})}{2} = \frac{130°}{2} = 65° \text{ olur.}$$

5.4. Dairenin Çevresi ve Alanı

5.4.1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları

Dairenin Çevresi

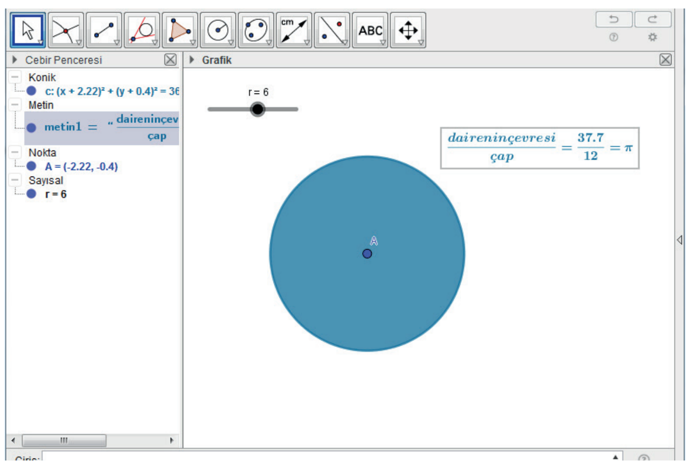


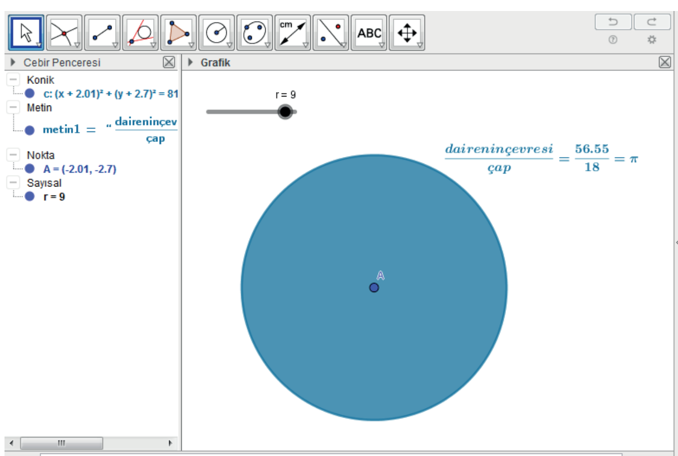
Bir çemberin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine **daire** denir. Yandaki şekilde verilen O merkezli ve r yarıçaplı bir dairenin çevre uzunluğunun dairenin çap uzunluğuna (2r) oranı π sabit sayısını verir.

$$\frac{\text{Dairenin Çevre Uzunluğu}}{\text{Dairenin Çap Uzunluğu}} = \frac{\text{Ç}}{2r} = \pi \Rightarrow \text{Ç} = 2\pi r$$

7. Uygulama: Dairenin Çevresinin Uzunluğu

Merkez ve yarıçapla çember ikonuna tıklayınız. Grafik sayfasına tıkladığınızda oluşan pencerede **yarıçap** bölümüne **r** yazarak çemberin yarıçapını gösteren sürgüyü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **1**, **maksimum** değerini **10**, **artış** değerini **1** yapınız.
Sürgüyü r = 6 konumuna getiriniz. **Girişe çevre** yazınız. Oluşan satırda **konik** yerine **c** yazınız. Cebir penceresinde çevre, a olarak gözükecektir. **a** ismini değiştirerek **çevre** yapınız. Dairenin yarıçapının uzunluğu 6 birim olduğunda dairenin çevresinin uzunluğunun çapın uzunluğuna oranının π ye eşit olduğuna dikkat ediniz.
Sürgüyü r = 9 konumuna getiriniz. Dairenin çevresinin çapa oranının π ye eşit olduğuna dikkat ediniz.





r yarıçaplı bir dairenin çevresinin uzunluğunun çapa oranı π ye eşittir.

O hâlde $\frac{\text{çevre}}{\text{çap}} = \pi$ ise r yarıçaplı dairenin çevresi $\frac{\text{çevre}}{2r} = \pi \Rightarrow$ **çevre = 2πr** olur.

36. Örnek



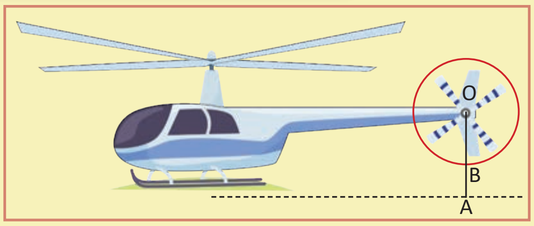


Yarıçap uzunluğu 25 cm olan bir araba tekerleğinin etrafı zincir ile sarılmak isteniyor. Zincirin uzunluğunun <u>en az</u> kaç cm olması gerektiğini bulunuz.

Çözüm

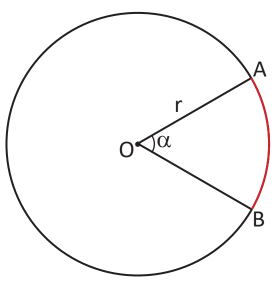
Tekerleği tam olarak sarabilmesi için zincirin uzunluğunun en az tekerleğin çevre uzunluğu kadar olması gerekir. Tekerleğin yarıçap uzunluğu $r = 25$ cm olduğundan zincirin uzunluğu en az $Ç = 2\pi r = 2\pi 25 = 50\pi$ cm olmalıdır.

Sıra Sizde



Bir helikopterin kuyruk pervanesinin iniş ve kalkışlarda güvenlik sorunu oluşturmaması için pervanenin dairesel hareketinin yere en yakın olduğu mesafe hesaplanmak isteniyor. Yandaki şekilde $|OA| = 5$ metre ve oluşan çemberin çevre uzunluğu 6π metre olduğuna göre AB doğru parçasının uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

Sonuç



Yandaki O merkezli, r yarıçaplı dairede AOB merkez açısının gördüğü **yay uzunluğu** $|\overset{\frown}{AB}|$ ile gösterilir ve aşağıdaki orantı ile bulunur. Daireyi sınırlayan çember, ölçüsü 360° olan bir yay olarak kabul edilebilir.

360° nin gördüğü yay uzunluğu — $2\pi r$ birim olursa
α nın gördüğü yay uzunluğu — x birim olur.

$x \cdot 360° = 2\pi r \cdot \alpha \Rightarrow x = \mathbf{|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}}$ olur.

Matematik Tarihi

Archimedes'in (Arşimet) π sayısının değerini elde etmek için kullandığı yaklaşım şu gerçeğe dayanır: Bir çemberin çevre uzunluğu, n kenarlı düzgün kirişler ve teğetler dörtgenlerinin çevre uzunlukları arasındadır ve n arttıkça iki çevre uzunluğu arasındaki sapma azalır. Bu gösterim, çokgenler ile çemberin çevre uzunluğu arasındaki fark yavaş yavaş tüketildiği için **tüketme yöntemi** olarak bilinir.

Tüketme yöntemini kullanan Archimedes, π sayısının olduğu aralığı aşağıdaki gibi bulur.

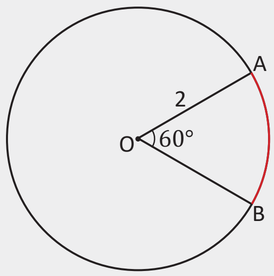
$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

π sayısı yaklaşık 3,14 olarak kabul edilir.

D. M. Burton, Matematik Tarihi – Giriş, cilt 7, Ankara: Nobel Yaşam, 2017.

37. Örnek



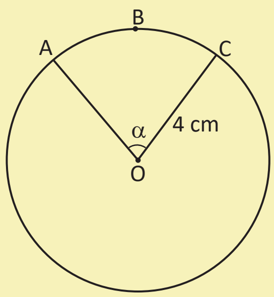
Yandaki şekilde yarıçap uzunluğu 2 cm olan O merkezli bir daire veriliyor. $m(\overset{\frown}{AOB}) = 60°$ olduğuna göre $|\overset{\frown}{AB}|$ kaç cm olur?

Çözüm

Yukarıda verilen dairenin yarıçap uzunluğu $r = 2$ cm ve $m(\overset{\frown}{AOB}) = 60°$ olduğundan

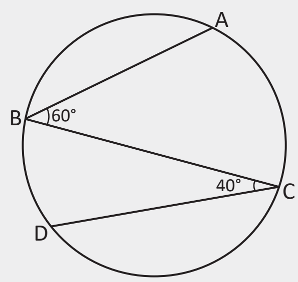
$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360°} = 2\pi \cdot 2 \cdot \dfrac{60°}{360°} = \dfrac{2\pi}{3}$ cm olur.

Sıra Sizde

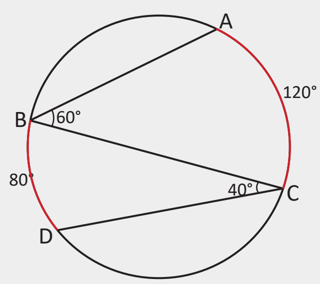


Şekildeki dairenin yarıçapı 4 cm ve ABC yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{ABC}| = 2\pi$ cm olarak veriliyor.
Buna göre $m(\overset{\frown}{AOC}) = \alpha$ kaç derecedir?

38. Örnek



Yandaki şekilde $m(\overset{\frown}{ABC}) = 60°$, $m(\overset{\frown}{BCD}) = 40°$, $|\overset{\frown}{AC}| + |\overset{\frown}{BD}| = 15\pi$ cm olduğuna göre dairenin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm

Yanda verilen dairede

$m(\overset{\frown}{BD}) = 2 \cdot 40° = 80°$, $m(\overset{\frown}{AC}) = 2 \cdot 60° = 120°$ ve

$m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{AC}) = 80° + 120° = 200°$ olur.

200° lik yay uzunluğu — 15π cm olursa

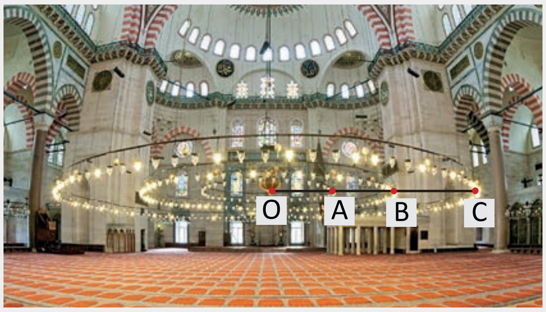
360° lik yay uzunluğu — x cm olur.

$x \cdot 200° = 15\pi \cdot 360° \Rightarrow x = \dfrac{15\pi \cdot 360°}{200°}$

$\Rightarrow x = 27\pi$ cm

$Ç = 2\pi r = 27\pi \Rightarrow r = \dfrac{27}{2}$ cm olur.

39. Örnek



O merkezli iç içe 3 çemberden oluşan yandaki avize görselinde A, B, C sırasıyla iç, orta ve dıştaki çemberlerin üzerinde birer noktadır. $|OA| = |AB| = 2$ m ve $|OC| = 7$ m olarak verilmiştir. Aydınlatma için elinde 130 ampul bulunan bir kişi, bu ampulleri merkezleri aynı olan iç içe 3 çember üzerinde eşit aralıklarla asmak istiyor.

a) Yan yana asılan iki ampul arasına çekilecek elektrik kablosu kaç metre olur?

b) Ortadaki çembere kaç ampul asılabilir?

Çözüm

a) En içteki çemberin çevre uzunluğu $= 2\pi r_1 = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ metre,

ortadaki çemberin çevre uzunluğu $= 2\pi r_2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ metre,

dıştaki çemberin çevre uzunluğu $= 2\pi r_3 = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ metre,

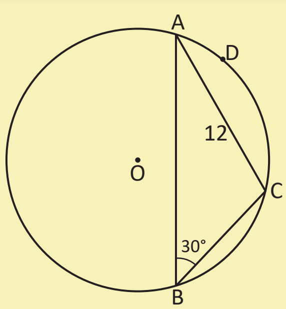
toplam çevre uzunluğu $= 4\pi + 8\pi + 14\pi = 26\pi$ metre olur.

İki ampul arasına çekilecek kablo uzunluğu $= \dfrac{\text{Toplam çevre uzunluğu}}{\text{Ampul sayısı}}$

$= \dfrac{26\pi}{130} = \dfrac{\pi}{5}$ metre olur.

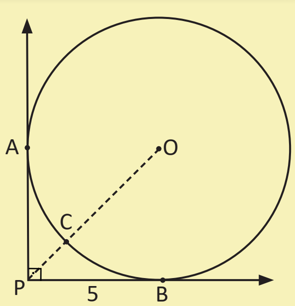
b) Ortadaki çembere asılacak ampul sayısı $= \dfrac{8\pi}{\frac{\pi}{5}} = 40$ olur.

Sıra Sizde



Yandaki O merkezli çemberde ABC üçgeninin köşeleri çember üzerinde, $m(\widehat{ABC}) = 30°$ ve $|AC| = 12$ cm olduğuna göre ADC yayının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Sıra Sizde

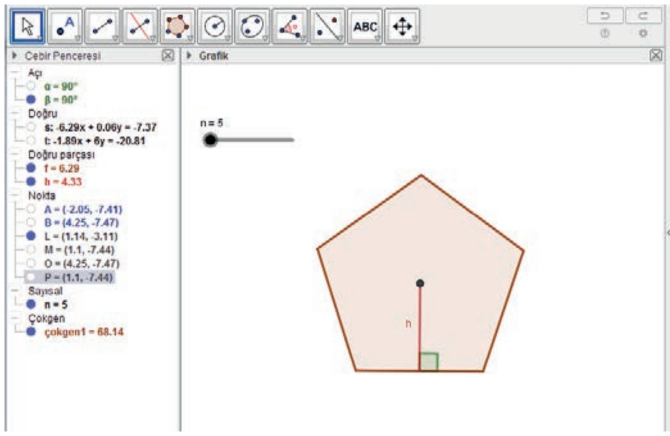


Yandaki O merkezli çemberde P, C, O noktaları doğrusal olarak veriliyor. $m(\widehat{APB}) = 90°$ ve $|PB| = 5$ cm olduğuna göre PC uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

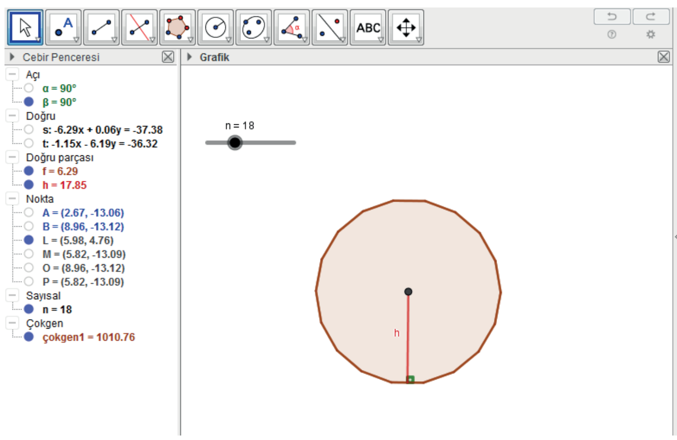
Dairenin Alanı

8. Uygulama: Dairenin Alanının Bulunması

Düzgün çokgen ikonuna ardından grafik ekranında herhangi iki noktaya tıklayınız. Açılan **noktalar** penceresine **n** yazarak sürgüyü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **3**, **maksimum** değerini **50**, **artış** değerini **1** yapınız. Sürgüyü n=5 konumuna getiriniz. n, çokgenin kenar sayısını gösterir. Düzgün beşgen ekranda görülecektir.



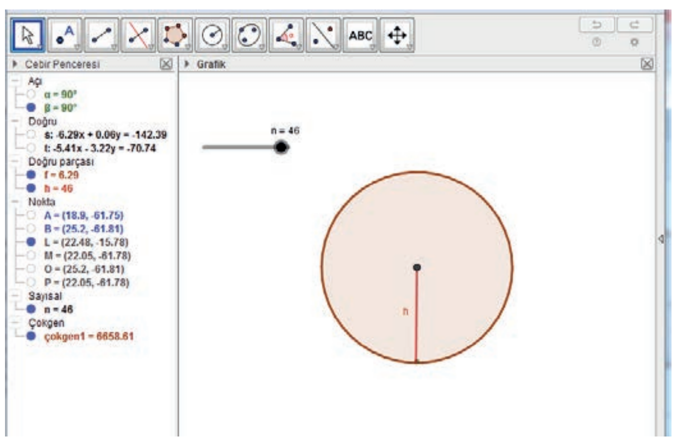
Çokgenin merkezi ile bir kenarını birleştiren ve uzunluğu h olan yüksekliği çiziniz. Düzgün çokgenin çevre uzunluğu Ç olmak üzere alanı $Ç \cdot \frac{h}{2}$ olur.
Sürgüyü n=18 konumuna getiriniz.



Kenar sayısı arttıkça h yüksekliği dairenin yarıçapına, çokgenin çevresi dairenin çevresine yaklaşır.

Sürgüyü n=46 durumuna getiriniz. Çokgenin belirgin bir şekilde dairesel yapıya dönüştüğüne dikkat ediniz.
n sürgüsü yeteri kadar artırıldığında h yüksekliği dairenin yarıçapına, düzgün çokgenin çevresi dairenin çevresine, düzgün çokgenin alanı dairenin alanına dönüşür. Buna göre h yarıçaplı dairenin alanı

$$Ç \cdot \frac{h}{2} = \frac{2\pi \cdot h \cdot h}{2} = \pi \cdot h^2 \text{ olur.}$$



O hâlde **yarıçapı r olan dairenin alanı A** $= \pi r^2$ olur.

40. Örnek

Çevre uzunluğu 10π cm olan dairenin alanını bulunuz.

Çözüm

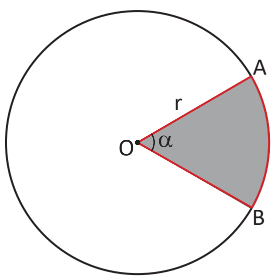
Dairenin çevre uzunluğu $= Ç = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 10\pi$ olduğundan
$r = 5$ cm olur.

Dairenin alanı $= A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi 5^2 = 25\pi$ cm^2 olur.

Sıra Sizde

Çevre uzunluğu 8π cm olan dairenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Daire Diliminin Alanı

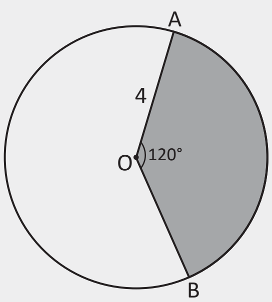


Bir dairede herhangi bir yayın ve yayın uç noktalarını dairenin merkeziyle birleştiren iki yarıçapın sınırladığı bölgeye **daire dilimi** denir.

Yandaki şekilde boyalı alan bir daire dilimidir.

AOB merkez açısı α ise **daire diliminin alanı** $= \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$ olur.

41. Örnek



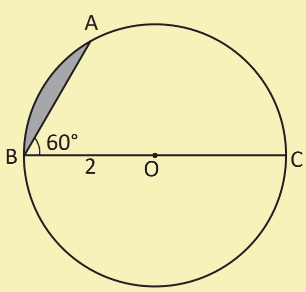
Yanda verilen O merkezli dairede $m(\widehat{AOB}) = 120°$ ve $r = 4$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulunuz.

Çözüm

$m(\widehat{AOB}) = 120°$ olduğundan

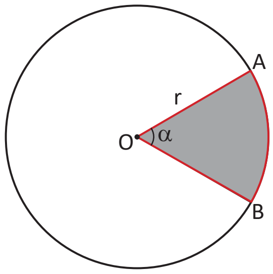
boyalı bölgenin alanı $= \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \dfrac{120°}{360°} \cdot \pi 4^2 = \dfrac{16\pi}{3}$ cm^2 olur.

Sıra Sizde



Yanda verilen O merkezli dairede $m(\widehat{ABC}) = 60°$ ve $r = 2$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Sonuç



Yanda verilen O merkezli dairede

$|\overset{\frown}{AB}| = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \Rightarrow \frac{\alpha}{360°} = \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2\pi r}$ olur.

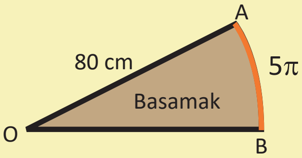
Boyalı bölgenin alanı $= \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

$= \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{|\overset{\frown}{AB}| \cdot r}{2}$ olur.

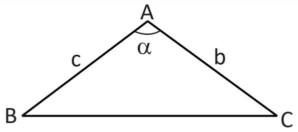
Sıra Sizde

Bir döner merdivenin daire dilimi şeklindeki basamakları şekildeki gibidir. Basamakların üst yüzeylerini cilalamak isteyen bir kişi basamak uzunluğunu $|OA| = 80$ cm ve $|\overset{\frown}{AB}| = 5\pi$ cm olarak ölçüyor. Döner merdivende 14 basamak olduğuna göre cilalanacak yüzeyin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



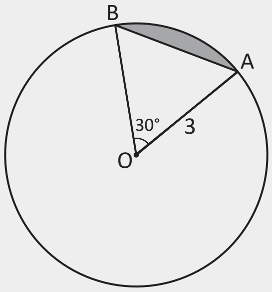


Hatırlatma



$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

42. Örnek



Yanda verilen O merkezli dairede $m(\widehat{AOB}) = 30°$ ve $|AO| = 3$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm

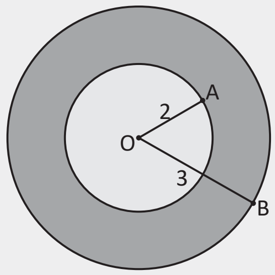
Boyalı bölgenin alanı, daire diliminin alanından OAB üçgeninin alanı çıkarılarak bulunur.

Boyalı bölgenin alanı $= \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha$

$= \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \sin 30°$

$= \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{9}{4}\right)$ cm^2 olur.

43. Örnek



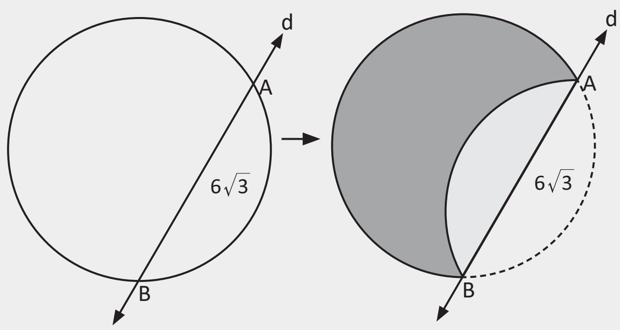
Yandaki şekilde yarıçap uzunlukları 2 cm ve 3 cm olan aynı merkezli iki daire verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

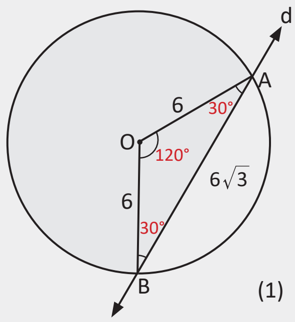
Boyalı bölgenin alanı S ile gösterildiğinde

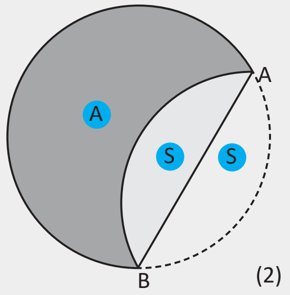
$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(3^2 - 2^2) = 5\pi$ cm^2 olur.

44. Örnek



Şekildeki d doğrusu, çemberi A ve B noktalarında kesmektedir. Çember, d doğrusu simetri ekseni olacak şekilde katlandığında ikinci bir şekil elde ediliyor. Çemberin yarıçap uzunluğu 6 cm, AB kirişinin uzunluğu $6\sqrt{3}$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.





Çözüm

Çemberin merkezi O olsun. Merkezden [OA] ve [OB] yarıçapları çizildiğinde kenar uzunlukları 6-6-$6\sqrt{3}$ cm olan AOB özel üçgeninde $m(\widehat{AOB}) = 120°$ olur.

2. şekildeki boyalı bölgenin alanı A,
diğer bölgelerin alanı S olsun. Bu durumda

$A + 2S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ cm^2 olur.

$A = 36\pi - 2S$ olur.

S alanını bulmak için 1. şekilde merkez açısı 120° olan daire diliminin alanından AOB üçgeninin alanı çıkarılır.

$$S = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin 30°$$

$S = 12\pi - 9\sqrt{3}$ cm^2 olur.

S alanı $A = 36\pi - 2S$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$A = 36\pi - 2 \cdot (12\pi - 9\sqrt{3}) = 36\pi - 24\pi + 18\sqrt{3}$

$A = 12\pi + 18\sqrt{3}$ cm^2 olur.

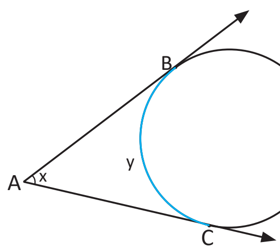
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

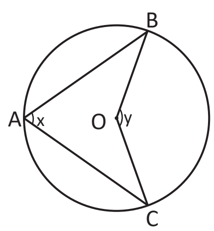
1. Çemberi farklı iki noktada .... doğruya çemberin keseni denir.
2. Çember ile .... ortak noktası olan doğruya çemberin teğeti denir.
3. Bir çember ile çemberin iç bölgesinin birleşimine .... denir.
4. Bir çemberde <u>en büyük</u> kirişe çemberin .... denir.
5. Bir çemberin çevre uzunluğunun çemberin çap uzunluğuna oranı .... sabit sayısına eşittir.
6. Köşesi çember üzerinde bulunan ve kolları çemberi farklı iki noktada kesen açıya çemberin .... denir.
7. Bir çemberde, gördüğü yayın ölçüsüne eşit olan açı .... açıdır.
8. Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine .... denir.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

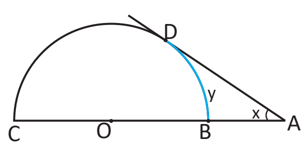
9. ( )



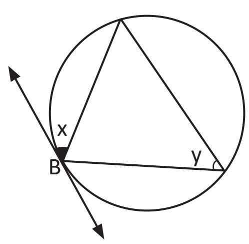
10. ( )



11. ( )



12. ( )



a) $x - y = 180°$

b) $y = 2x$

c) $x + y = 180°$

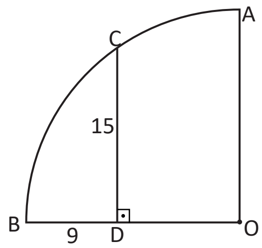
ç) $x = y$

d) $x = 2y$

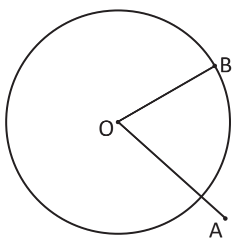
e) $x + y = 90°$

f) $x - y = 90°$

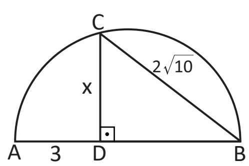
C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

13. 

O merkezli çeyrek çemberde $|BD| = 9$ birim, $|DC| = 15$ birim ve $[CD] \perp [OB]$ olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

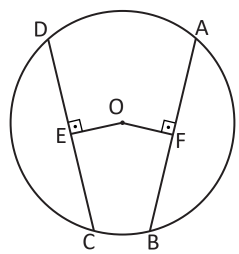
14. 

Şekildeki O merkezli çemberde B noktası çemberin üzerinde, A noktası çemberin dışındadır. $|OB| = (2x + 1)$ birim ve $|OA| = (5x - 8)$ birim olduğuna göre x in <u>en küçük</u> tam sayı değeri için çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

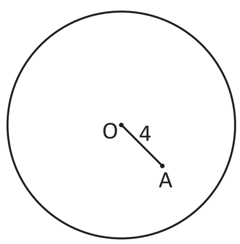
15. 

[AB] çaplı yarım çemberde $|BC| = 2\sqrt{10}$ birim ve $|AD| = 3$ birim olduğuna göre $|DC| = x$ değerinin kaç birim olduğunu bulunuz.

16. Yarıçap uzunluğu 13 birim olan bir çemberde uzunluğu 10 birim olan kirişin merkeze uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

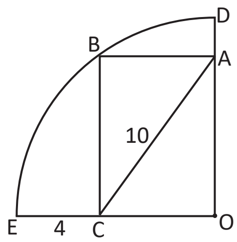
17. 

O merkezli çemberde $|AB| = |CD| = 6$ birim, $|OE| = (2x + 1)$ birim ve $|OF| = (5x - 2)$ birim olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

18. 

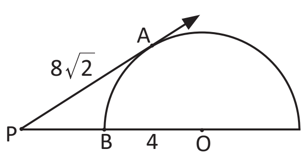
Yarıçap uzunluğu 8 birim olan şekildeki O merkezli çemberde $|OA| = 4$ birim olduğuna göre A noktasından geçen <u>en kısa</u> kirişin uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

19.



O merkezli çeyrek çemberde OABC dikdörtgen, |AC| = 10 birim ve |EC| = 4 birim olduğuna göre |AD| nun kaç birim olduğunu bulunuz.

20.



Yarıçap uzunluğu 4 birim olan O merkezli yandaki çembere PA ışını A noktasında teğettir. |AP| = $8\sqrt{2}$ birim olduğuna göre |PB| nun kaç birim olduğunu bulunuz.

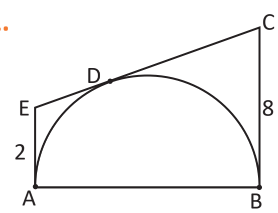
21.



Deniz kirliliği, deniz canlılarının ve insanların hayatını olumsuz etkiler. Denizlerdeki kirliliğin sebeplerinden biri petrol tankeri kazalarıdır.

Bir tanker kazasında denize sızan petrol dairesel şekilde yayılmaktadır. Petrolün yayılma hızı saatte 5 metre olduğuna göre
a) Kirlenen deniz yüzeyinin yarıçap uzunluğunu zamana (t) bağlı bir fonksiyon olarak yazınız.
b) Kirlenen deniz yüzeyinin alanını zamana bağlı bir fonksiyon olarak yazınız.
c) 1 günün sonunda deniz yüzeyinde oluşacak kirliliğin kaç metrekare olacağını bulunuz.

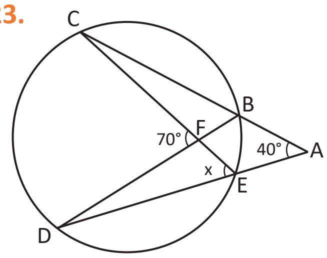
22.



Yandaki [AB] çaplı yarım çember [AE], [EC] ve [BC] na sırasıyla A, D ve B noktalarında teğettir. |AE| = 2 birim, |BC| = 8 birim olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

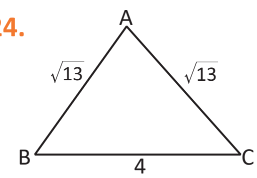
23.



Şekildeki çemberde $m(\widehat{A}) = 40°$ ve $m(\widehat{CFD}) = 70°$ olduğuna göre $m(\widehat{DEC}) = x$ kaç derecedir?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

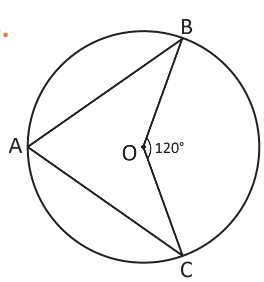
24.



Yandaki ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = \sqrt{13}$ birim, $|BC| = 4$ birim olduğuna göre üçgenin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

A) $\frac{15}{6}$ B) $\frac{13}{6}$ C) $\frac{11}{6}$ D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{11}{4}$

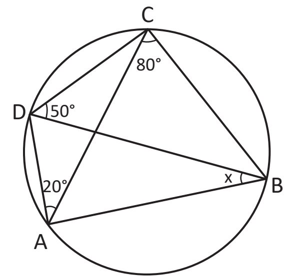
25.



Şekildeki çemberde $m(\widehat{BOC}) = 120°$, $m(\widehat{ABO}) = 3x + 10°$ ve $m(\widehat{ACO}) = 2x + 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABO})$ kaç derecedir?

A) 10 B) 12 C) 20 D) 22 E) 30

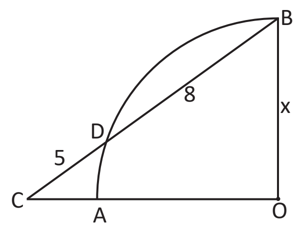
26.



Şekildeki çemberde $m(\widehat{ACB}) = 80°$, $m(\widehat{CDB}) = 50°$ ve $m(\widehat{DAC}) = 20°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABD}) = x$ kaç derecedir?

A) 30 B) 50 C) 60 D) 70 E) 75

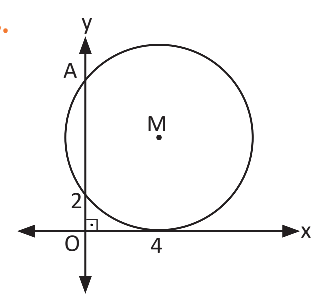
27.



Yandaki O merkezli çeyrek çemberde BOC dik üçgen, $|BD| = 8$ birim ve $|DC| = 5$ birim olduğuna göre $|BO| = x$ kaç birimdir?

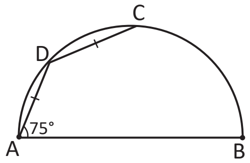
A) 8 B) 5 C) $3\sqrt{13}$ D) $2\sqrt{13}$ E) $\sqrt{13}$

28.



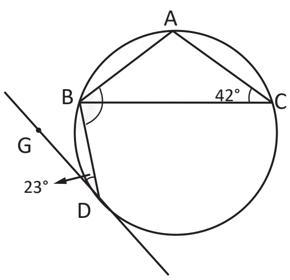
Yandaki şekilde M merkezli çember y eksenini (0, 2) ve A noktasında kesmekte, x eksenine (4, 0) noktasında teğettir. Çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

29. 

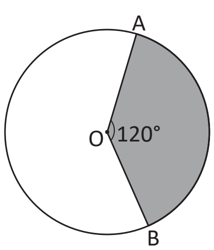
Şekildeki [AB] çaplı yarım çemberde $|AD| = |DC|$ ve $m(\widehat{DAB}) = 75°$ olduğuna göre BC yayının ölçüsü kaç derecedir?

A) 60 B)75 C) 80 D) 100 E) 120

30. 

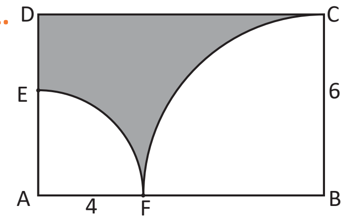
Yandaki çemberde teğetin değme noktası D olup ABC üçgeninin köşeleri çemberin üzerindedir. $m(\widehat{BDG}) = 23°$ ve $m(\widehat{ACB}) = 42°$ olduğuna göre DBA açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 95 B) 105 C) 110 D) 115 E) 125

31. 

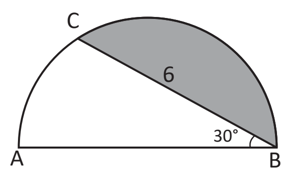
Yandaki O merkezli dairede $|OA| = \sqrt{5}$ birim ve $m(\widehat{AOB}) = 120°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{3}$

32. 

Yandaki şekilde ABCD dikdörtgen ve A, B merkezli çeyrek çemberler F noktasında teğettir. $|BC| = 6$ cm, $|AF| = 4$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 olur?

A) $50 - 13\pi$ B) $60 - 13\pi$ C) $60 - 15\pi$ D) $60 - 26\pi$ E) $70 - 15\pi$

33. 

Yandaki [AB] çaplı yarım çemberde $[BC] = 6$ cm, $m(\widehat{ABC}) = 30°$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 olur?

A) $4\pi - 3\sqrt{3}$
B) $4\sqrt{3} - 2\pi$
C) $2\pi - \sqrt{3}$
D) $9\sqrt{3}$
E) $\pi - \sqrt{3}$

34. Çevre uzunluğu, alanının $\frac{2}{5}$ si olan dairenin alanı kaç birimkaredir?

A) 10π B) 16π C) 25π D) 27π E) 36π

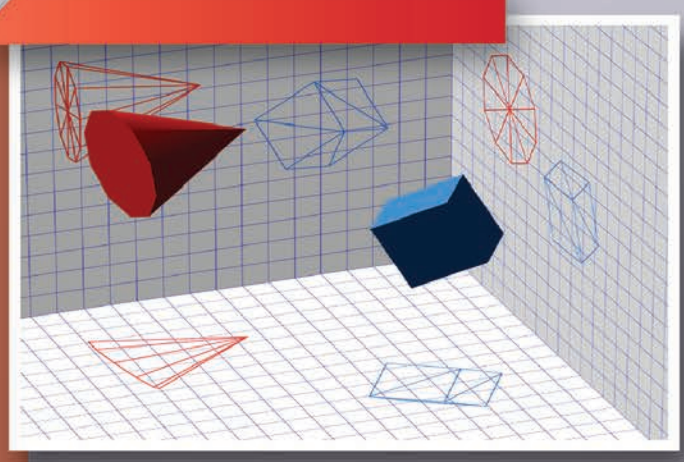
GEOMETRİ

6. UZAY GEOMETRİ

6.1. Katı Cisimler

Bu bölümde

- Küre, dik dairesel silindir ve dik dairesel koninin alan ve hacim bağıntılarını oluşturarak işlemler yapmayı **öğreneceksiniz**.



KAVRAMLAR

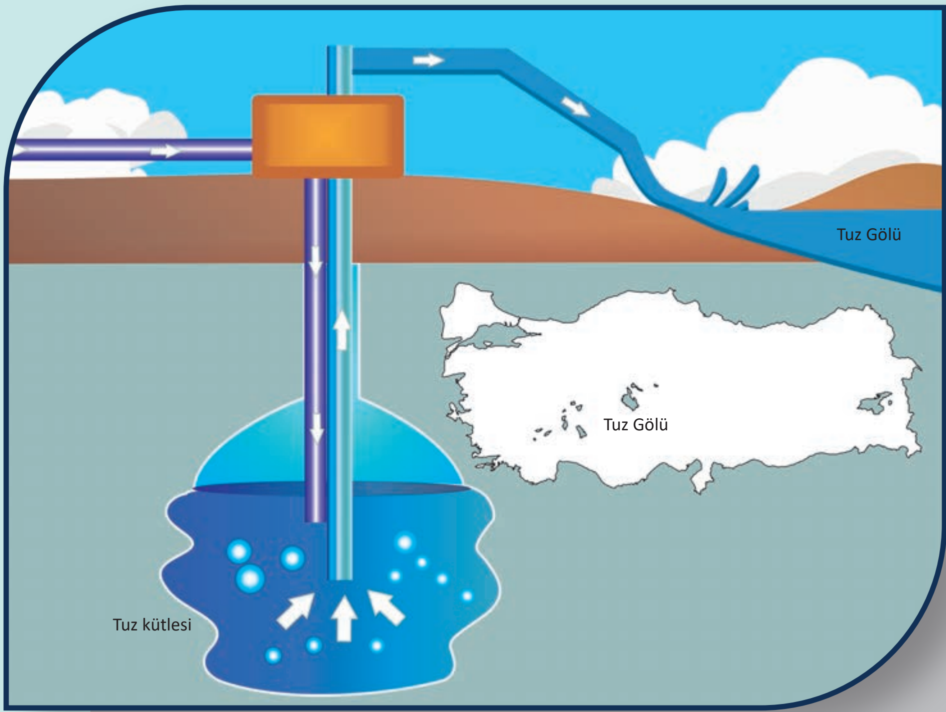
Dik Dairesel Silindir, Dik Dairesel Koni, Küre, Alan, Hacim, Ana Doğru, Tepe Noktası

HAZIRLIK ÇALIŞMASI

Tuz Gölü Yeraltı Doğal Gaz Depolama Projesi

Tuz Gölü'nün yaklaşık 40 km güneyindeki Sultanhanı beldesinde bulunan tesislerde yerin 1400 metre altındaki tuz yapılarında kuyular açılmaktadır. Açılan kuyulara tatlı su basılarak eritilen tuz, bir boru hattıyla Tuz Gölü'ne aktarılmaktadır. Bu şekilde 12 suni mağara oluşturulmaktadır. Oluşturulan 12 suni mağarada doğal gaz depolaması yapılacaktır. Bu mağaralardan günlük 44 milyon metreküp gaz ülkemizin doğal gaz şebekesine dağıtılacaktır.

http://tuzgoluebt.botas.gov.tr/index.php/tr



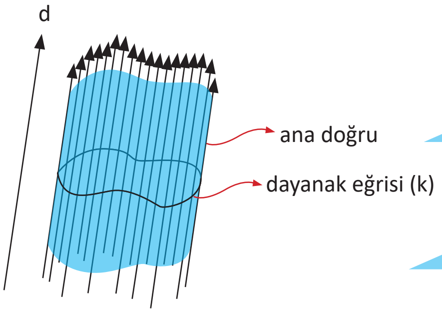
Doğal gazın hangi miktarlarda depolanacağını tespit etmek için mağaralarla ilgili ne tür bilgi ve kavramlara ihtiyaç duyulur?

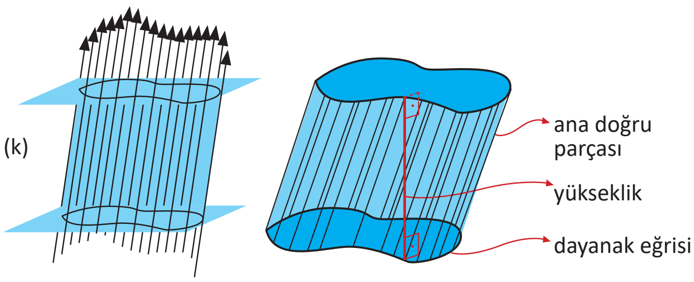
6.1. Katı Cisimler

6.1.1. Dik Dairesel Silindir, Dik Dairesel Koni, Kürenin Alan ve Hacim Bağıntıları

Silindir

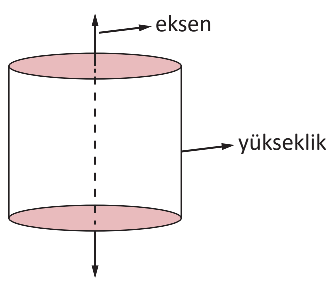
Uzaydaki bir düzlemde bir k kapalı eğrisi ile bu düzleme paralel olmayan bir d doğrusu verilmiş olsun. k eğrisini kesen ve d doğrusuna paralel olan doğruların kümesine **silindirik yüzey** denir. k eğrisine **silindirik yüzeyin dayanak eğrisi**, d doğrusuna paralel olan doğruların her birine **silindirik yüzeyin ana doğrusu** denir.





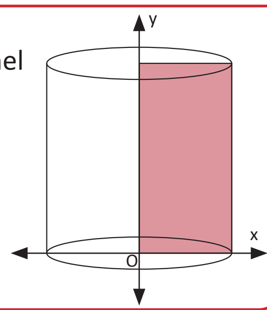
Silindirik yüzey ile bu yüzeyi kesen paralel iki düzlemin sınırladığı cisme **silindir** denir.
Düzlem ile oluşan kesitlerin her birine **silindirin tabanı** denir.
Ana doğrunun tabanı kestiği noktada, tabandan geçen bütün doğrulara dik olan silindire **dik silindir**, tabanları daire olan dik silindire **dik dairesel silindir** denir.
Bu kitapta dik dairesel silindir yerine silindir ifadesi kullanılacaktır.

Silindirin tabanlarının merkezinden geçen doğruya **silindirin ekseni** denir.
Silindirin tabanları arasındaki uzaklığa **silindirin yüksekliği** denir.
Silindirin yüksekliği aynı zamanda ana doğru parçasının uzunluğudur.

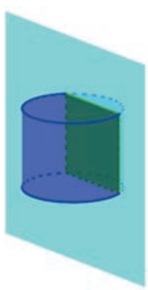


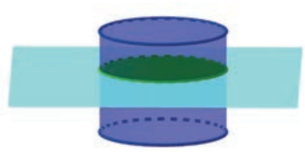
Not

Dikdörtgensel bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile dönel silindir elde edilir.
Dik dairesel silindire **dönel silindir** de denir.

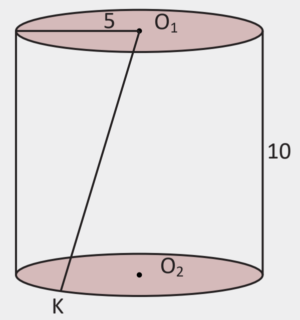


Silindir ile silindirin tabanlarına **dik** bir düzlemin kesişimi **dikdörtgen**dir.
Silindir ile silindirin tabanlarına **paralel** bir düzlemin kesişimi **daire**dir.

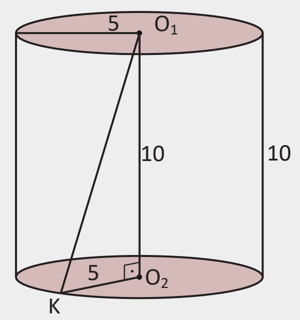




1. Örnek



O_1 ve O_2 taban merkezleri olmak üzere yanda verilen silindirin yüksekliği 10 birim, taban yarıçap uzunluğu 5 birimdir. K, taban dairesinin çevresi üzerinde bir nokta olduğuna göre O_1K uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.



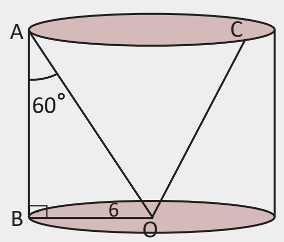
Çözüm

O_1, O_2 ve K noktaları birleştirildiğinde O_1KO_2 dik üçgeni oluşur. Bu dik üçgende Pisagor teoremi uygulandığında

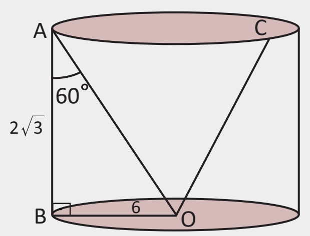
$|O_1K|^2 = |O_1O_2|^2 + |KO_2|^2 = 10^2 + 5^2 = 125$ olur. Buradan

$|O_1K| = 5\sqrt{5}$ birim olur.

2. Örnek



Şekildeki silindirde O, taban merkezidir. A ve C, silindirin üst taban çevresi üzerinde; B, alt taban çevresi üzerinde birer noktadır. $m(\widehat{BAO}) = 60°$ ve silindirin taban yarıçap uzunluğu 6 birim olduğuna göre OC uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.



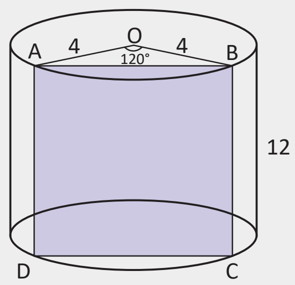
Çözüm

ABO, 30°-60°-90° özel üçgeninde kenar uzunlukları sırasıyla $a - a\sqrt{3} - 2a$ oranında olduğundan

$|AB| = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ birim ve $|AO| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

Buradan $|AO| = |OC|$ olduğundan $|AO| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

3. Örnek



Taban merkezi O olan şekildeki silindirde A ve B üst taban dairesinin çevresi üzerinde birer noktadır. Silindir [AB] boyunca tabana dik bir düzlemle kesiliyor. $m(\widehat{AOB}) = 120°$, $|OA| = |OB| = 4$ birim, silindirin yüksekliği 12 birim olduğuna göre oluşan kesitin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

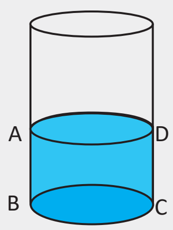
Çözüm

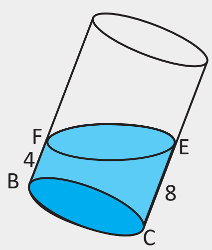
Silindirin tabanlara dik bir düzlem ile kesilmesi sonucu dikdörtgen elde edilir. ABCD dikdörtgeninin alanı, oluşan kesitin alanıdır. AOB, 30°-30°-120° özel üçgeninde kenar uzunlukları sırasıyla $a - a - a\sqrt{3}$ oranında olduğundan

$|AB| = 4\sqrt{3}$ birim olur. Buradan

kesitin alanı $|AB| \cdot |AD| = 4\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3}$ birimkare olur.

4. Örnek





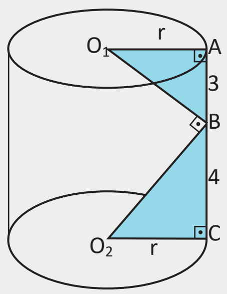
İçinde bir miktar su bulunan bir silindir, şekildeki gibi eğik duruma getirilmiştir. $|FB| = 4$ birim, $|CE| = 8$ birim olduğuna göre AB uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$|AB| = |DC| = x$ olsun. Silindirin eğik duruma getirilmesi taban yarıçapını ve içindeki su miktarını değiştirmediğinden $|AB| + |DC| = |FB| + |EC|$ olur. Buradan

$x + x = 4 + 8 \Rightarrow x = 6$ birim olur.

5. Örnek



Yandaki silindirde r yarıçap, O_1 ve O_2 taban merkezleri, $[O_1B] \perp [O_2B]$, $m(\widehat{O_1AB}) = m(\widehat{O_2CB}) = 90°$, $|AB| = 3$ birim ve $|BC| = 4$ birim olduğuna göre silindirin taban yarıçap uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

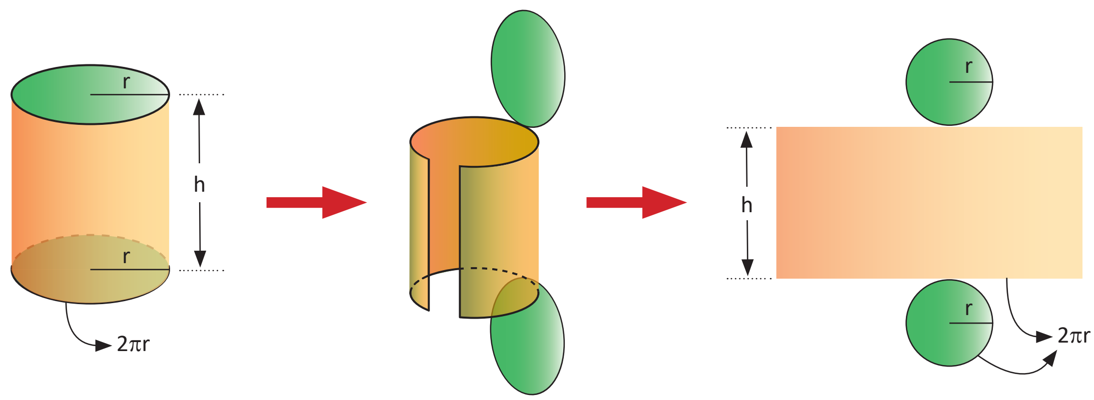
Çözüm

A.A. benzerlik oranına göre O_1AB ile BCO_2 dik üçgenleri benzer üçgenlerdir. Buradan

$\frac{r}{4} = \frac{3}{r} \Rightarrow r^2 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$ birim olur.

Silindirin Yüzey Alanı

Aşağıda taban yarıçap uzunluğu r, yüksekliği h olan silindirin açınımı görülmektedir.



Açınımda görüldüğü gibi silindirin yan yüzeyi bir dikdörtgen; tabanları, birbirine eş dairelerdir. Silindirin yüzey alanı, oluşan dikdörtgenin alanı ve iki taban dairesinin alanları toplamıdır.

Dikdörtgenin bir kenar uzunluğu silindirin yüksekliğine, bu kenara dik olan kenar uzunluğu dairenin çevre uzunluğuna eşittir.
Aşağıda bazı ifadelerin sembolleri verilmiştir.
Yanal yüzey alanı $= Y_A$
Taban alanı $= T_A$
Tüm silindirin yüzey alanı $= S_A$
Taban dairesinin yarıçap uzunluğu $= r$
Buradan
Yanal yüzey alanı = Taban çevre uzunluğu · Yükseklik $\Rightarrow Y_A = 2\pi r \cdot h$,
$T_A = \pi \cdot r^2$ birimkare $\Rightarrow$ Taban alanları toplamı $2 \cdot T_A = 2\pi \cdot r^2$ olur.
Tüm silindirin yüzey alanı = Yanal yüzey alanı + 2 · Taban alanı olduğundan
$S_A = Y_A + 2 \cdot T_A$
$\mathbf{S_A = 2\pi r \cdot h + 2\pi \cdot r^2}$ olur.

6. Örnek

Bir silindirin taban alanı 20π birimkare, yanal alanı 120π birimkare olduğuna göre bu silindirin yüksekliğinin kaç birim olduğunu bulunuz.

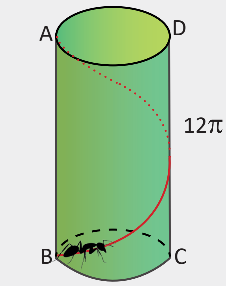
Çözüm

Taban alanı $\pi \cdot r^2 = 20\pi$ olduğundan $r = 2\sqrt{5}$ birim olur.

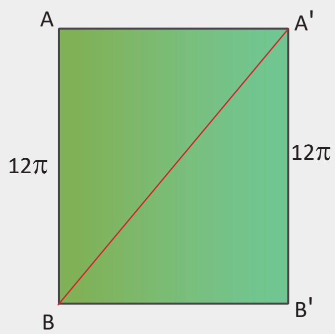
$Y_A = 2\pi r \cdot h = 120\pi$ olduğundan $2\pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot h = 120\pi$ olur. Buradan

silindirin yüksekliği $h = \dfrac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$ birim olur.

7. Örnek



Taban yarıçap uzunluğu 6 birim, ana doğru parçasının uzunluğu 12π birim olan bir silindirde bir karınca yandaki şekildeki gibi B noktasından silindir yüzeyini takip ederek A noktasına gidiyor. Karıncanın gidebileceği <u>en kısa</u> yolun kaç birim olduğunu bulunuz.



Çözüm

Silindir AB ana doğru parçası boyunca kesilerek açıldığında şekildeki dikdörtgen elde edilir. Karıncanın gidebileceği en kısa yol BB'A' dik üçgeninin hipotenüs uzunluğudur (|BA'|).

BB' uzunluğu taban dairesinin çevre uzunluğudur.

$|BB'| = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$ birim olur. Buradan karıncanın gidebileceği en kısa yol

$|BA'| = 12\sqrt{2}\pi$ birim olur.

Silindirin Hacmi

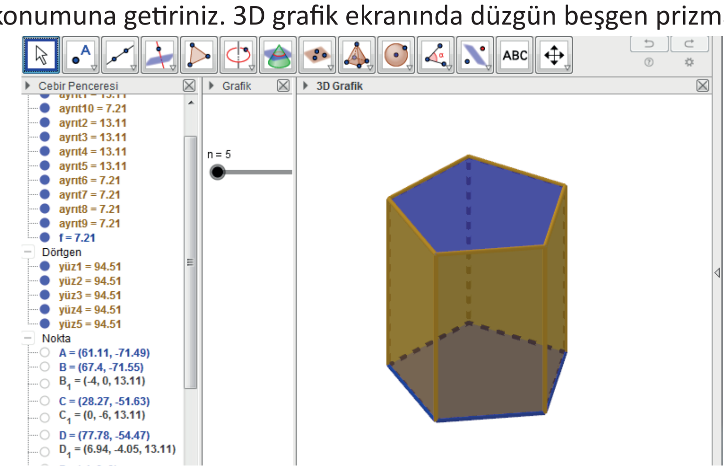
Silindirin hacmi GeoGebra programında prizmaların hacminden faydalanılarak hesaplanacaktır.

1. Uygulama: Silindirin Hacmi ile Prizmanın Hacmi Arasındaki İlişki

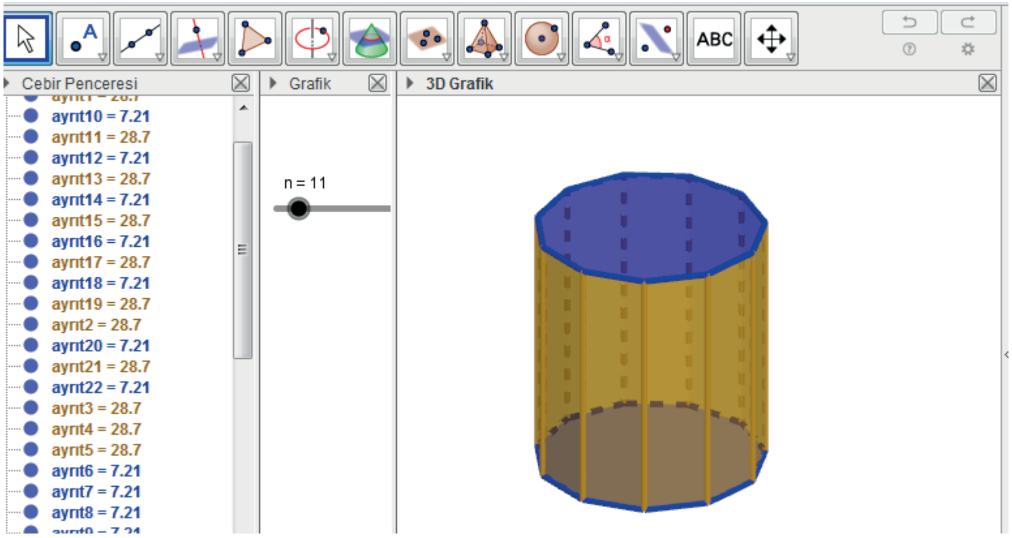
Düzgün çokgen ikonuna tıklayınız. Grafik ekranına iki nokta koyduğunuzda **noktalar** adı altında bir pencere açılacaktır. Penceredeki ilgili yere n yazarak Enter tuşuna basınız. n için sürgü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini **4**, **maksimum** değerini **50**, **artış** değerini **1** yapınız.

3D grafik penceresini açınız. **Girişe prizma** yazdığınızda karşınıza çıkan **çokgen** bölümüne cebir penceresinde yazan çokgenin ismini, **yükseklik değeri** yerine **6** yazınız.

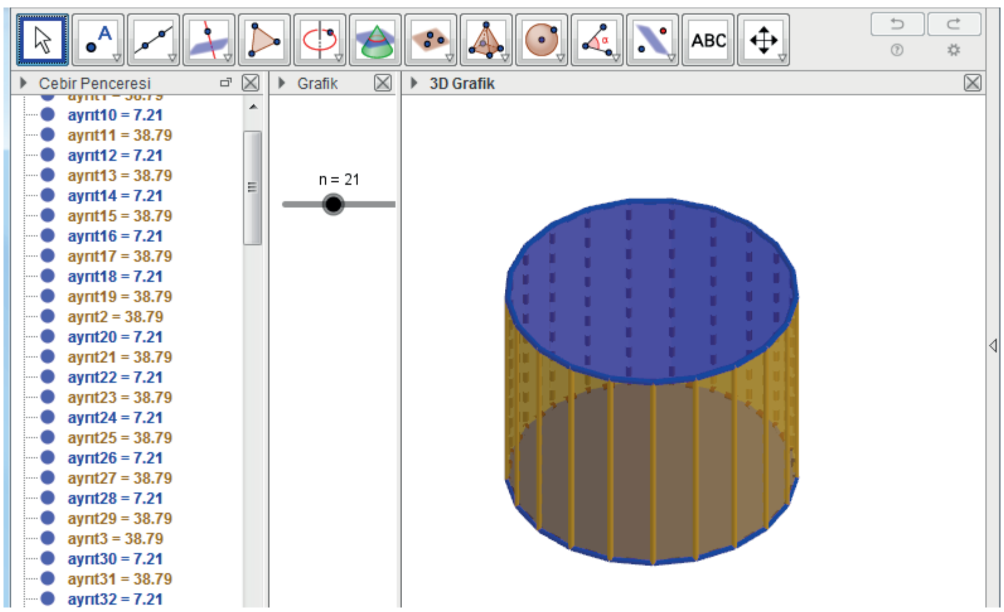
Sürgüyü n=5 konumuna getiriniz. 3D grafik ekranında düzgün beşgen prizma oluşacaktır.



Sürgüyü n = 11 konumuna getiriniz. 3D grafik ekranında düzgün onbirgen oluşacaktır.



Sürgüyü n = 21 konumuna getiriniz. 3D grafik ekranında düzgün yirmibirgen oluşacaktır.



Sonuç

Kenar sayısını (n) artırdığınızda prizmanın tabanları çokgenden daireye; prizma, silindire dönüşecektir.
Bu durumda prizmanın hacmi ile silindirin hacmi eşitlenecektir.
Prizmanın hacmi, prizmanın taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı olduğundan silindirin hacmi de silindirin taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı olur.
Taban dairesinin yarıçap uzunluğu r, yüksekliği h olan bir silindirin taban alanı πr^2 olduğundan hacmi $\pi r^2.h$ olur. O hâlde silindirin hacmi $\mathbf{V = \pi r^2.h}$ olur.

8. Örnek

Yanal yüzey alanı 120π birimkare olan silindirin taban yarıçap uzunluğu 8 birimdir. Buna göre silindirin hacminin kaç birimküp olduğunu bulunuz.

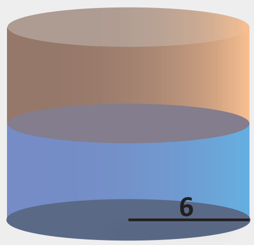
Çözüm

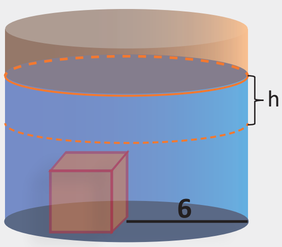
$Y_A = 2\pi r \cdot h = 120\pi \Rightarrow 2\pi \cdot 8 \cdot h = 120\pi$

$h = \frac{15}{2}$ birim olur. Buradan

silindirin hacmi $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{15}{2} = 480\pi$ birimküp olarak bulunur.

9. Örnek





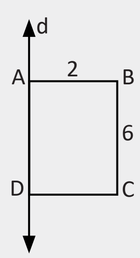
Yandaki şekilde yarıçap uzunluğu 6 birim olan dik silindirin içinde bir miktar su vardır. Bir ayrıtı 3 birim olan bir küp, silindirin içindeki suya bırakılıyor. Küp, suyun içine tamamen battığına göre silindirin içindeki suyun kaç birim yükseleceğini bulunuz.

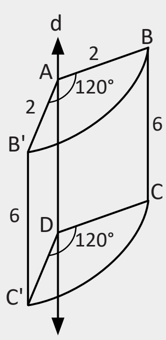
Çözüm

Su h kadar yükselsin. h kadar yükseklik oluşturan suyun hacmi küpün hacmine eşittir.
Bir kenar uzunluğu a birim olan küpün hacmi
$a^3 = 3^3 = 27$ birimküp,
silindirin h yüksekliğindeki suyun hacmi
$\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot h = 36\pi \cdot h$ birimküp olur. O hâlde $36\pi \cdot h = 27$ olmalıdır. Buradan

su $h = \frac{27}{36\pi} = \frac{3}{4\pi}$ birim yükselir.

10. Örnek





Yandaki ABCD dikdörtgeninin AD kenarı d doğrusu üzerindedir. $|BC| = 6$ birim, $|AB| = 2$ birim olarak verilmiştir. Bu dikdörtgen d doğrusu etrafında 120° döndürüldüğünde oluşan cismin hacminin kaç birimküp olacağını bulunuz.

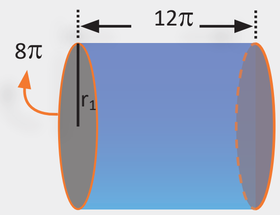
Çözüm

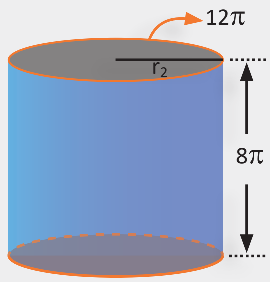
Merkez açısı 120° olan cismin hacmi, yarıçap uzunluğu 2 birim ve yüksekliği 6 birim olan silindirin hacminin $\frac{1}{3}$ i olur.

$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 6}{3} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 6}{3} = 8\pi$ birimküp olur.

11. Örnek







Yandaki dikdörtgenin [AD] ve [BC] kenarları birleştirilerek V_1 hacimli bir silindir elde edilmiştir.
Aynı dikdörtgenin [AB] ve [DC] kenarları birleştirilerek V_2 hacimli bir silindir daha elde edilmiştir.
Buna göre $\frac{V_1}{V_2}$ oranını bulunuz.

Çözüm

[AD] ve [BC] kenarları birleştirilerek oluşturulan silindirin taban çevre uzunluğu 8π birim ve yüksekliği $h_1 = 12\pi$ birim olur. Taban çevre uzunluğu $2\pi \cdot r_1 = 8\pi \Rightarrow r_1 = 4$ birim olur.
Birinci durumdaki hacim
$V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 12\pi = 192\ \pi^2$ birimküp olur.
[AB] ve [DC] kenarları birleştirilerek oluşturulan silindirin taban çevre uzunluğu 12π birim ve yüksekliği $h_2 = 8\pi$ birim olur.
Taban çevre uzunluğu $2 \cdot \pi \cdot r_2 = 12\pi \Rightarrow r_2 = 6$ birim olur.
İkinci durumdaki hacim
$V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2 = \pi \cdot 6^2 \cdot 8\pi = 288\ \pi^2$ birimküp olur. Buradan

hacimlerin oranı $\frac{V_1}{V_2} = \frac{192\pi^2}{288\pi^2} = \frac{2}{3}$ olur.

12. Örnek

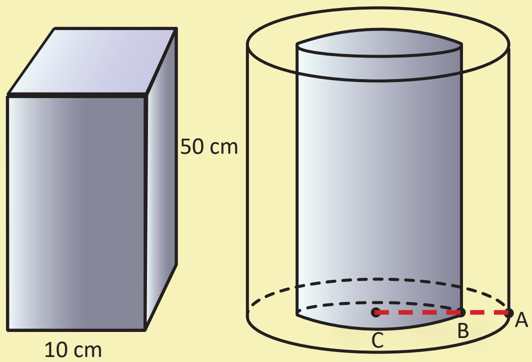
Zülal Hanım, kurak geçen günlerde bahçesini sulamak maksadı ile bir kapta yağmur suyu biriktirmektedir. Silindir şeklinde ve yeterli derinliğe sahip kabın taban yarıçap uzunluğu 20 santimetredir.
Boş kabı yağmurlu bir günde evinin önüne bırakan Zülal Hanım, akşamüstü yerel bir televizyon kanalından bulunduğu kasabada o gün metrekareye 30 kilogram yağmur düştüğünü öğreniyor. Buna göre
a) Zülal Hanım'ın kabında kaç litre yağmur suyu biriktiğini,
b) Kapta biriken suyun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.
($\pi = 3{,}14$ alınız, 1kg suyun hacmi = 1 litre = 1 dm^3)

Çözüm

a) Silindirik kabın taban alanı
$\pi \cdot r^2 = (3{,}14) \cdot 20^2 = 1256$ santimetrekare $= 0{,}1256\ m^2$,
1 m^2 ye 30 kg yağmur düştüğüne göre kapta biriken su
$30 \cdot (0{,}1256) = 3{,}768$ kg $= 3{,}768$ litre olur.
b) Kaptaki suyun hacmi $3{,}768$ kg $= 3{,}768\ dm^3$ olur.
Suyun hacmi $\pi \cdot r^2 \cdot h = (3{,}14) \cdot 2^2 \cdot h = (12{,}56) \cdot h\ dm^3$ olur.
$(12{,}56) \cdot h = 3{,}768$ olduğundan (20 cm = 2 dm) suyun yüksekliği
$h = 0{,}3$ dm $= 3$ cm olur.

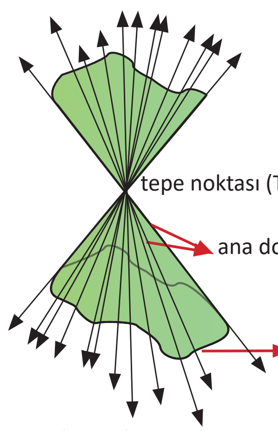
Sıra Sizde

Şekilde tabanının bir kenar uzunluğu 10 cm, yüksekliği 50 cm olan kare prizma biçiminde bir demir blok verilmiştir. Demir blok eritilerek kalınlığı $|AB| = 1$ cm, tabanının dış yarıçap uzunluğu $|AC| = 5$ cm olan boru hâline dönüştürülüyor. Borunun uzunluğunun en yakın tam sayı değerinin kaç cm olacağını bulunuz. ($\pi = 3{,}14$ alınız.)

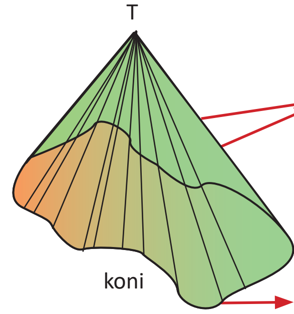


Koni

Bir düzlem üzerinde kapalı bir k eğrisi ve düzlemin dışında bir T noktası verilmiş olsun. T noktasından geçen ve k eğrisini kesen doğruların kümesine **konisel yüzey** denir.
k eğrisine **konisel yüzeyin dayanak eğrisi**, T noktasına **konisel yüzeyin tepe noktası** denir.
T noktasından geçen doğruların her birine **konisel yüzeyin ana doğrusu** denir.

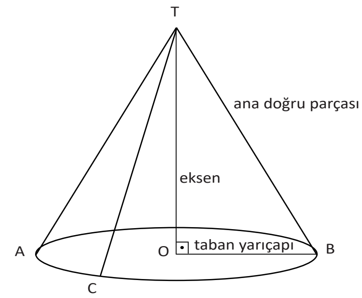


Konisel yüzey bir düzlemle kesildiğinde tepe noktası ile kesit arasında kalan cisme **koni** denir.
Düzlemsel kesite **koninin tabanı**, tepenin tabana olan uzaklığına **koninin yüksekliği** denir.
Tepeden tabana indirilen dikme, tabanın ağırlık merkezinden geçiyorsa bu tür konilere **dik koni**, tabanı daire olan dik koniye **dik dairesel koni** denir.

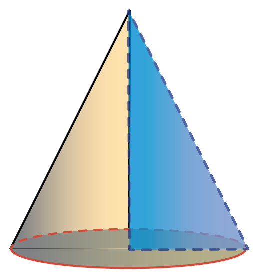


Bu kitapta dik dairesel koni yerine koni ifadesi kullanılacaktır.

Yandaki koni, [AB] tabanın bir çapı olmak üzere **(T, AB)** biçiminde gösterilir.
Koninin tepe noktasından ve tabanın ağırlık merkezinden geçen doğruya **koninin ekseni** denir.
Koninin ana doğru parçalarının uzunlukları eşittir.
$(|TA| = |TB| = |TC|)$



Dik dairesel koniye **dönel koni** de denir. Dönel koni, bir dik üçgenin bir dik kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan konidir.

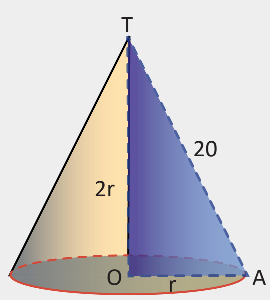


Yandaki şekilde görüldüğü gibi bir koni, tepe noktasından ve tabandan geçen bir düzlemle kesildiğinde oluşan kesit ikizkenar üçgendir.



13. Örnek

Bir koninin taban yarıçapının uzunluğu koninin yüksekliğinin yarısına eşittir. Koninin ana doğru parçasının uzunluğu 20 birim olduğuna göre koninin yüksekliğini bulunuz.



Çözüm

Şekildeki TOA dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$4r^2 + r^2 = 20^2$

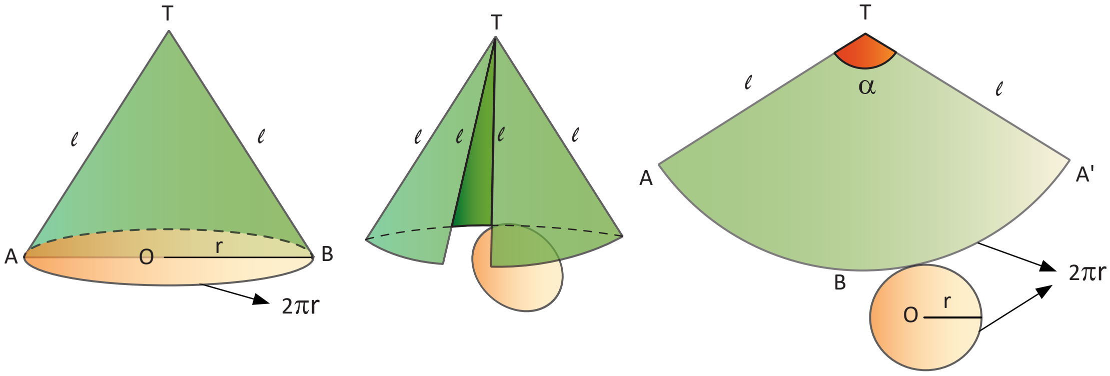
$5r^2 = 20^2 \Rightarrow 5r^2 = 400$

$\Rightarrow r^2 = 80 \Rightarrow r = 4\sqrt{5}$ birim olur. Buradan

koninin yüksekliği $|TO| = 2r = 2 \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ birim olur.

Koninin Yüzey Alanı

Koni yüzeyi, yanal yüzey ve taban yüzeyi olmak üzere iki bölümden oluşur. Taban yarıçap uzunluğu r, ana doğru parçasının uzunluğu ℓ olan bir koninin açınımı aşağıda verilmiştir.



Buna göre

- Koninin yanal yüzeyi, merkez açısı α ve yarıçap uzunluğu ℓ olan bir daire dilimidir.
- Koninin tabanı, yarıçap uzunluğu r olan bir dairedir.

Koninin Yanal Yüzey Alanı (Daire Diliminin Alanı)

Koninin taban yarıçap uzunluğu r, ana doğru parçasının uzunluğu ℓ olmak üzere r ile ℓ arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

Yukarıdaki koninin açınımında merkez açısı α, yarıçap uzunluğu ℓ olan daire diliminde ABA' yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{ABA'}| = \frac{2\pi \cdot \ell \cdot \alpha}{360°}$ olur.

ABA' yayının uzunluğu aynı zamanda O merkezli dairenin çevresinin uzunluğuna eşittir.

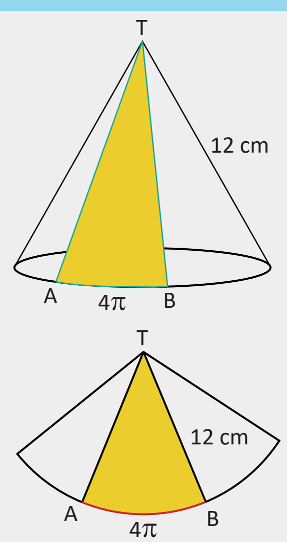
O hâlde $|\overset{\frown}{ABA'}| = 2\pi r$ olur. Buradan

$\frac{2\pi \cdot \ell \cdot \alpha}{360°} = 2\pi \cdot r$ olduğuna göre koninin taban yarıçapı ve ana doğru parçasının uzunluğu arasındaki bağıntı $\boxed{\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°}}$ şeklinde elde edilir.

Daire diliminin alanı, yarıçap uzunluğu ile merkez açıyı gören yayın uzunluğunun çarpımı şeklinde yazıldığında koninin yanal yüzey alanı $Y_A = \frac{2\pi \cdot r \cdot \ell}{2} = \pi \cdot r \cdot \ell \Rightarrow \boxed{Y_A = \pi \cdot r \cdot \ell}$ olur.

Koninin tüm yüzey alanı, yanal alan ile taban alanının toplamıdır. Buradan koninin tüm yüzey alanı $\mathbf{A = Y_A + T_A = \pi \cdot r \cdot \ell + \pi \cdot r^2}$ olur.

14. Örnek



Bir koninin yüzeyi AB yayından tepe noktasına kadar şekildeki gibi boyanmıştır. Koninin ana doğru parçasının uzunluğu 12 cm ve AB yayının uzunluğu 4π cm olduğuna göre boyalı yüzeyin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulunuz.

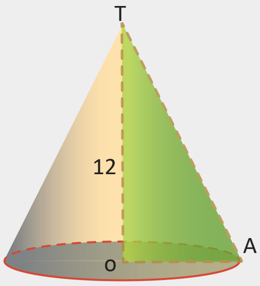
Çözüm

TAB yüzeyinin açınımı bir daire dilimi olur.

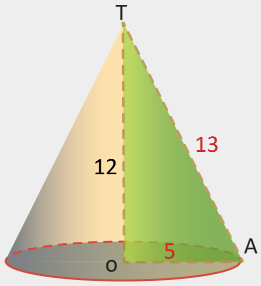
O hâlde boyalı yüzeyin alanı

$\frac{4\pi \cdot 12}{2} = 24\pi \text{ cm}^2$ olarak bulunur.

15. Örnek



Yandaki şekilde taban alanı 25π birimkare ve yüksekliği 12 birim olan koni verilmiştir. Buna göre koninin yanal yüzey alanını bulunuz.



Çözüm

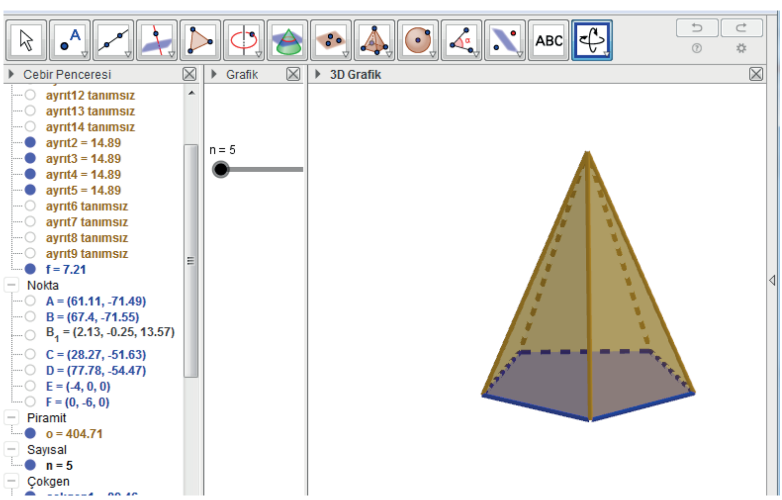
Koninin taban alanı $\pi.r^2 = 25\pi$ olduğundan $r = 5$ birimdir.
TOA dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|TA| = \ell = 13$ birim olur. Buradan
yanal yüzey alanı $Y_A = \pi \cdot r \cdot \ell = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\,\pi$ birimkare
olarak bulunur.

Koninin Hacmi

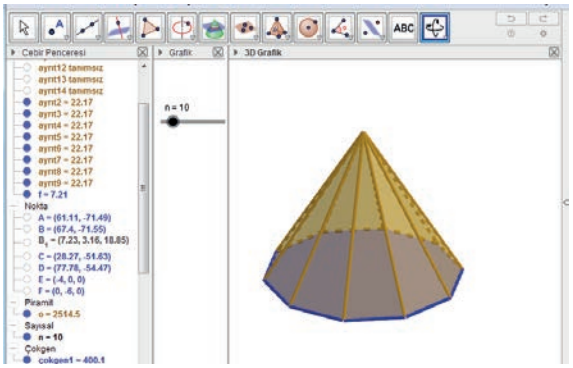
Koninin hacmi GeoGebra programında piramitlerin hacminden faydalanılarak hesaplanacaktır.

2. Uygulama: Koninin Hacmi ile Piramidin Hacmi Arasındaki İlişki

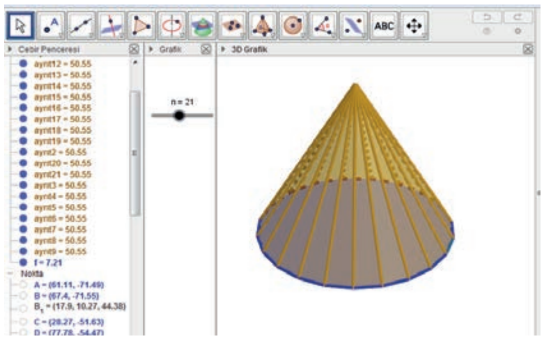
Düzgün çokgen ikonuna tıklayınız. Grafik ekranında farklı iki noktaya tıkladığınızda **Noktalar** adı altında bir pencere açılacaktır. Penceredeki satıra **n** yazıp Enter tuşuna basınız. Sürgünün **minimum** değerini **4**, **maksimum** değerini **50**, **artış** değerini **1** yapınız.
3D Grafik Penceresini açınız. **Girişe piramit** yazdığınızda oluşan satırda **Çokgen** bölümüne **çokgen1**, **yükseklik değeri** yerine **6** yazınız.
Sürgüyü $n = 5$ konumuna getiriniz. 3D grafik ekranında düzgün beşgen piramit oluşacaktır.



Sürgüyü n = 10 konumuna getiriniz. 3D grafik ekranında düzgün ongen piramit oluşacaktır.



Sürgüyü n = 21 konumuna getiriniz. 3D grafik ekranında düzgün yirmibirgen piramit oluşacaktır.

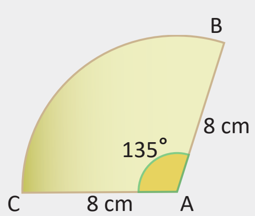


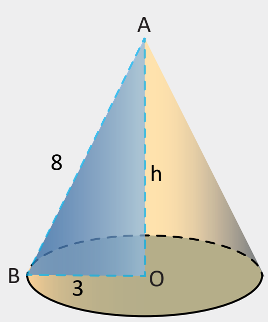
Sonuç

Kenar sayısını (n) artırdığınızda piramidin tabanı çokgenden daireye; piramit, koniye dönüşecektir. Bu durumda piramidin hacmi ile koninin hacmi eşitlenecektir.

Piramidin hacmi, piramidin taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının $\frac{1}{3}$ i olduğundan taban dairesinin yarıçap uzunluğu r ve yüksekliği h olan bir koninin hacmi $\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ olur.

16. Örnek





Yandaki daire diliminin merkez açısının ölçüsü 135° ve $|AB| = |AC| = 8$ birim olarak verilmiştir. Bu daire diliminin AB ile AC kenarları bir koni olacak şekilde çakıştırılıyor. Buna göre oluşan koninin hacmini bulunuz.

Çözüm

$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{r}{8} = \frac{135°}{360°} \Rightarrow r = 3$ birim olur.

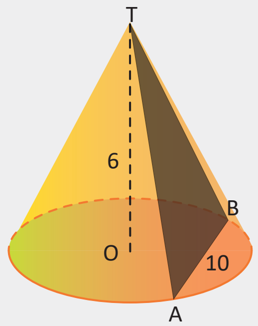
AOB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$h^2 + 9 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{55}$ birim olur. Buradan

oluşan koninin hacmi $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{55}}{3} = 3\sqrt{55}\,\pi$

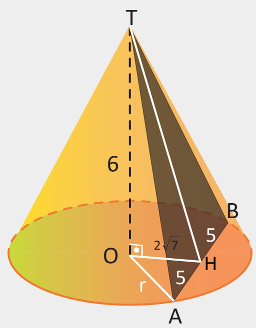
birimküp olur.

17. Örnek



Taban merkezi O olan yanda verilen koni, şekildeki gibi T, A, B noktalarından geçen bir düzlem ile kesiştiriliyor ve TAB üçgeni oluşturuluyor. $|TO| = 6$ birim, $A(\widehat{TAB}) = 40$ birimkare, $|AB| = 10$ birim olduğuna göre koninin hacminin kaç birimküp olduğunu bulunuz.

Çözüm



$|TA|$ ve $|TB|$ koninin ana doğru parçaları olduğundan birbirine eşittir. O hâlde TAB, ikizkenar üçgendir.
İkizkenar üçgenin TH yüksekliği çizildiğinde

TAB üçgeninin alanı $A(\widehat{TAB}) = \dfrac{|TH|\cdot|AB|}{2}$ olur.

$40 = \dfrac{|TH|\cdot 10}{2} \Rightarrow |TH| = 8$ birim olur.

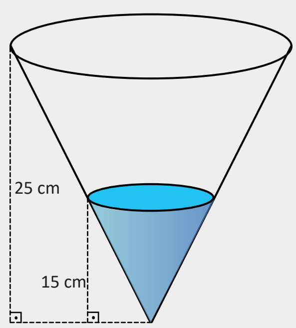
$|AH| = |HB| = 5$ birim olur.

TOH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|OH| = 2\sqrt{7}$ birim olur.

OAH dik üçgeninde r hipotenüs olur.
OAH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$r^2 = 28 + 25 \Rightarrow r^2 = 53$ olur. O hâlde

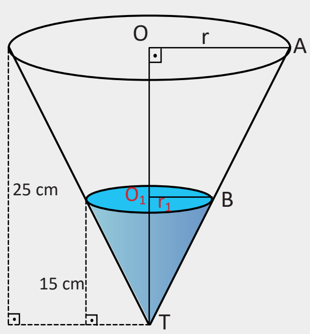
koninin hacmi $V = \dfrac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3} = \dfrac{\pi\cdot 53\cdot 6}{3} = 106\pi$ birimküp olur.

18. Örnek



Yandaki şekilde yüksekliği 25 cm olan koni biçimindeki bir kaba, bir musluktan sabit hızla su akmaktadır. Bir saat içerisinde kapta biriken suyun yüksekliği 15 cm olduğuna göre kabın kaç saatte dolacağını bulunuz.

Çözüm



Büyük koninin taban yarıçapı r, küçük koninin taban yarıçap uzunluğu r_1 olsun. TO_1B ile TOA üçgenlerinin benzerliğinden

$\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$ olur.

$r_1 = 3k$, $r = 5k$ olsun. $|TO_1| = 15$ cm, $|TO| = 25$ cm olur.

Küçük koninin içindeki suyun hacmi

$\dfrac{\pi\cdot r_1^2\cdot|TO_1|}{3} = \dfrac{\pi\cdot(3k)^2\cdot 15}{3} = \dfrac{135k^2\cdot h\pi}{3} = 45k^2\cdot h\pi$ olur.

Büyük koninin alabileceği suyun hacmi

$\dfrac{\pi\cdot r^2\cdot|TO|}{3} = \dfrac{\pi\cdot(5k)^2\cdot 25}{3} = \dfrac{625k^2}{3}\cdot h\pi$ olur. Buradan

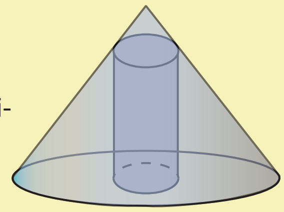
1 saatte $45k^2\cdot h\pi$

x saatte $\dfrac{625k^2}{3}\cdot h\pi$ olur. Buradan

$x = \dfrac{125}{27}$ olur. O hâlde kap $\dfrac{125}{27}$ saatte dolar.

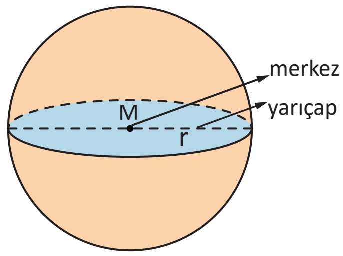
Sıra Sizde

Şekildeki koninin taban yarıçapı uzunluğu 6 cm, koninin içindeki silindirin üst taban çevresi koniye teğet, silindirin taban yarıçap uzunluğu 1 cm olduğuna göre koninin hacminin silindirin hacmine oranını bulunuz.



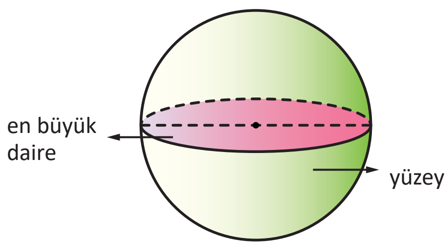
Küre

Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine **küre yüzeyi**, küre yüzeyi ile sınırlı cisme **küre** denir. Sabit noktaya **kürenin merkezi**, kürenin üzerindeki herhangi bir noktanın merkeze uzaklığına **kürenin yarıçapı** denir.



Not

Bir küre ile kürenin merkezinden geçen bir düzlemin ara kesiti **kürenin en büyük dairesi**dir.



Kürenin Yüzey Alanı

Bir kürenin yüzey alanı, kürenin en büyük dairesinin alanının 4 katıdır.
O hâlde kürenin en büyük dairesinin alanı πr^2 olduğundan **kürenin yüzey alanı A** $= 4\pi r^2$ olur.

19. Örnek

Yarıçap uzunluğu 2 birim olan kürenin yüzey alanını ve en büyük dairesinin alanını bulunuz.

Çözüm

Kürenin yarıçap uzunluğu $r = 2$ olduğundan
kürenin en büyük dairesinin alanı $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ birimkare,
kürenin yüzey alanı $4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ birimkare olur.

20. Örnek



Yarıçap uzunluğu 20 cm olan küre şeklindeki bir karpuzun iki eş parçasından biri yanda verilmiştir. Buna göre karpuz parçasının yüzey alanını bulunuz.

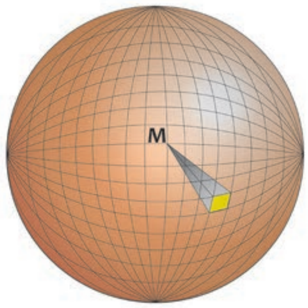
Çözüm

Şekilde görüldüğü gibi karpuzun kesiti bir daire oluşturur ve karpuzun kabuğu küre yüzeyinin yarısıdır. Küre yüzeyinin yarısının alanı ile dairenin alanının toplamı karpuz parçasının yüzey alanına eşittir.
Dairenin ve küre yüzeyinin yarısının yarıçapı aynı olduğundan
dairenin alanı $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$ cm^2 ve

küre yüzeyinin yarısının alanı $\frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 20^2 = 800\pi$ cm^2 olur. Buradan

karpuzun yüzey alanı 400π cm^2 $+ 800\pi$ cm^2 $= 1200\pi$ cm^2 olur.

Kürenin Hacmi



Bir kürenin yüzeyine n tane ilmekli bir ağ gerilmiş ve ağın her bir gözü birer taban olsun. Taban köşeleri kürenin merkezinde birleştirilerek piramide benzeyen şekiller oluşturulsun. Bu şekillerin her biri küreyi n tane parçaya böler. Ağ gözleri sıklaştıkça düzleşir. Piramide benzeyen bu şekillerin yüksekliği ağın göz sayısı artırılarak kürenin yarıçapına yaklaştırılabilir (h≈r).
Piramide benzeyen bu şekillerin taban alanları $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ve kürenin yüzey alanı $A = 4\pi . r^2$ olsun.
Bu şekillerin taban alanları toplamı yaklaşık olarak kürenin yüzey alanı olur. O hâlde
$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n \approx A$ olur. Oluşan bu şekillerin her birinin hacmi

$V_1 \approx \frac{A_1 \cdot h}{3} \approx \frac{A_1 \cdot r}{3}, \; V_2 \approx \frac{A_2 \cdot r}{3}, \; V_3 \approx \frac{A_3 \cdot r}{3}, ..., \; V_n \approx \frac{A_n \cdot r}{3}$ olur.

Kürenin hacmi yaklaşık olarak bu şekillerin hacimlerinin toplamı olur. O hâlde

$$V \approx \frac{A_1 . r}{3} + \frac{A_2 \cdot r}{3} + \frac{A_3 \cdot r}{3} + ... + \frac{A_n \cdot r}{3}$$

$$\approx (A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n) \cdot \frac{r}{3}$$

$$\approx \frac{A . r}{3} = \frac{4\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$ olur. Buradan

$$V = \mathbf{\frac{4\pi r^3}{3}}$$ elde edilir.

21. Örnek

Yarıçap uzunluğu 3 birim olan bir kürenin hacmini bulunuz.

Çözüm

Kürenin hacmi $V = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 27}{3} = 36\pi$ birimküp olur.

22. Örnek

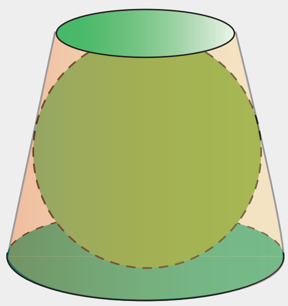
Yarıçap uzunluğu ve yüksekliği eşit koni biçiminde bir kap ile yarıçapı konininki ile aynı olan küre biçiminde bir kap veriliyor. Küre, sıvı ile dolu olduğuna göre koni biçimindeki kap kullanılarak küre içindeki suyun kaç defada boşaltılacağını bulunuz.

Çözüm

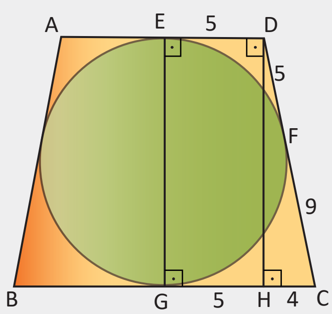
Kürenin hacmi $V_{küre} = \frac{4\pi r^3}{3}$ birimküp, koninin hacmi $V_{koni} = \frac{r \cdot \pi r^2}{3}$ birimküp olur.

Küre içindeki su $\frac{V_{küre}}{V_{koni}} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{\pi r^3}{3}} = 4$ defada boşaltılır.

23. Örnek



Tabanları birbirine paralel dairelerden oluşan kapalı bir cisim yanda verilmiştir. Cismin içine, tabanlara ve yan yüzeylere teğet olan küre şeklinde bir cisim yerleştiriliyor. Dıştaki cismin üst taban dairesinin çap uzunluğu 10 santimetre, alt taban dairesinin çap uzunluğu 18 santimetredir. Buna göre küre şeklindeki cismin hacminin kaç santimetreküp olduğunu bulunuz.



Çözüm

Yukarıdaki şeklin dik kesit görüntüsü yandaki gibidir. Kesit, ikizkenar yamuk ve yamuğa içten teğet çemberden oluşur.

$|ED| = 5$ cm, $|GC| = 9$ cm olur.

$|ED| = |DF| = 5$ cm, $|GC| = |CF| = 9$ cm olur.

D köşesinden BC kenarına çizilen dikmenin ayağı H olsun. Oluşan EDHG dikdörtgeninde $|ED| = |GH| = 5$ cm, $|HC| = 4$ cm olur. DHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında yamuğun yüksekliği $|DH| = 6\sqrt{5}$ cm olur.

Çemberin çap uzunluğu ile yamuğun yüksekliği eşit olduğundan $2r = |DH| = 6\sqrt{5}$ cm olur.

Kürenin yarıçap uzunluğu $r = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$ cm olur. Buradan kürenin hacmi

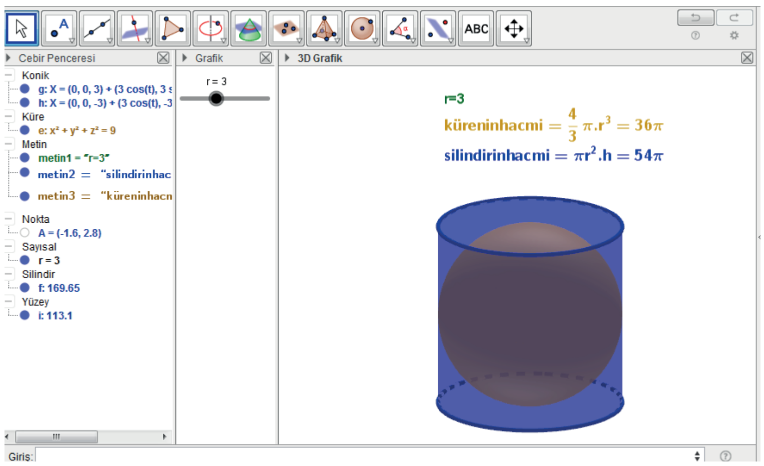
$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot (3\sqrt{5})^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 27 \cdot 5\sqrt{5}}{3} = 180\sqrt{5}\,\pi$ santimetreküp olur.

Sıra Sizde

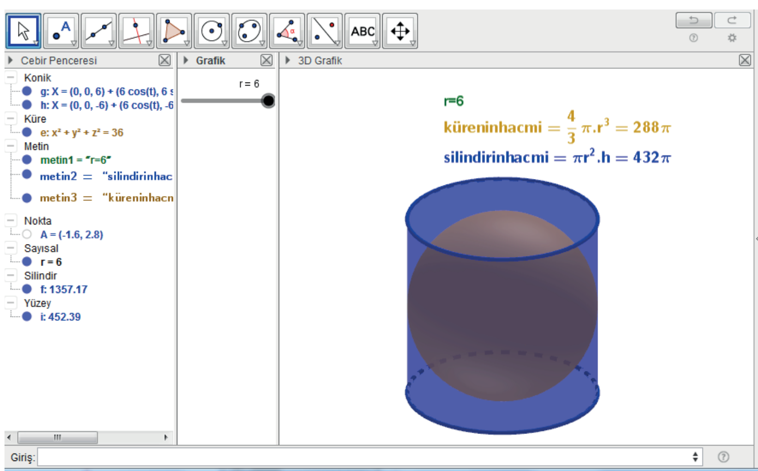
Yarıçapı ve yüksekliği aynı olan bir silindirin hacminin, silindirle aynı yarıçaplı bir kürenin hacminin kaç katı olacağını bulunuz.

3. Uygulama: Kürenin Hacmi ile Silindirin Hacmi Arasındaki İlişki

Görünüm başlığı altındaki **3D grafik** sayfasını açınız.
r sürgüsünü oluşturunuz. **Minimum** değerini **1**, **maksimum** değerini **6**, **artış** miktarını **1** yapınız. **Girişe küre** yazınız. Oluşan satırdaki **nokta** bölümüne **(0,0,0)**, **yarıçap** bölümüne **r** yazınız. Merkezi (0,0,0), yarıçap uzunluğu r olan küre 3D sayfasında görülecektir.
Girişe silindir yazınız. Oluşan satırdaki 1. **nokta** bölümüne (0,0,–r), 2. **nokta** bölümüne (0,0,r), **yarıçap** bölümüne **r** yazınız. Alt taban merkezi (0,0,–r), üst taban merkezi (0,0,r) ve taban yarıçap uzunluğu r olan silindir 3D sayfasında görülecektir.
3D sayfasında oluşan kürenin, silindirin yüzeylerine içten teğet olduğu görülür.
Silindirin yüksekliği ile kürenin çapı, silindirin taban çapı ile kürenin çap uzunluğu aynı olur.



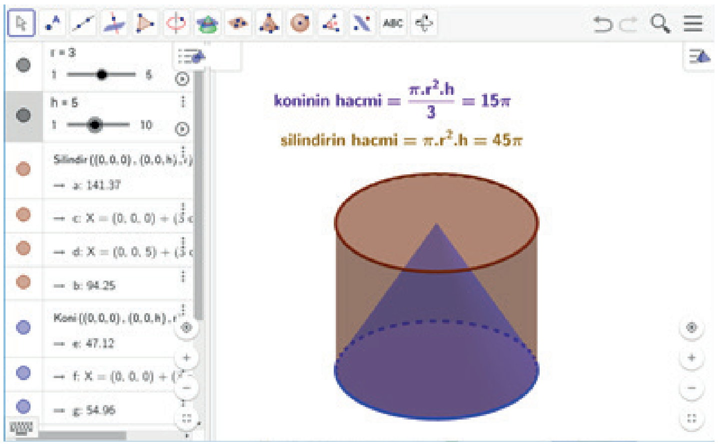
Sürgüyü r = 3 konumuna getiriniz.
Kürenin hacminin silindirin hacmine oranı $\frac{2}{3}$ olur.



Sürgüyü r = 6 konumuna getiriniz.
Kürenin hacmi ile silindirin hacmi arasındaki orana dikkat ediniz.
Sürgülerin farklı durumları için bu oranın sabit kalacağını tespit ediniz.
İç yüzeylerine teğet olmak şartıyla bir silindirin içine konulabilecek en büyük kürenin hacmi ile silindirin hacminin oranı $\frac{2}{3}$ olur.

4. Uygulama: Silindirin Hacmi ile Koninin Hacmi Arasındaki İlişki

r ve h sürgülerini oluşturunuz.
r için **minimum** değeri **1**, **maksimum** değeri **5**, **artış** miktarını **1** yapınız.
h için **minimum** değeri **1**, **maksimum** değeri **10**, **artış** değerini **1** yapınız.
Girişe silindir yazınız. Oluşan satırda 1. **nokta** bölümüne **(0,0,0)**, 2. **nokta** bölümüne **(0,0,h)**, **yarıçap** yerine **r** yazınız. Alt taban merkezi (0,0,0), üst taban merkezi (0,0,h) ve taban yarıçap uzunluğu r olan silindir 3D sayfasında görülecektir.
Girişe koni yazınız. Oluşan satırda 1. **nokta** bölümüne **(0,0,0)**, 2. **nokta** bölümüne **(0,0,h)**, **yarıçap** bölümüne **r** yazınız. Alt taban merkezi (0,0,0), tepe noktası (0,0,h) ve yarıçap uzunluğu r olan koni 3D sayfasında görülecektir.
Sürgüleri r = 3, h = 5 konumuna getiriniz. Taban yarıçap uzunluğu 3 birim, yüksekliği 5 birim olan koni ve silindiri oluşturunuz.



Koninin hacminin silindirin hacmine oranı $\frac{1}{3}$ olur.
Sürgülerin farklı durumları için bu oranın sabit kalacağını tespit ediniz.
İçine sığdığı en küçük silindir ile koninin hacminin oranı $\frac{1}{3}$ olur.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

1. Taban yarıçap uzunlukları ve yükseklikleri eşit olan koni ile silindirin hacimleri oranı ....olur.
2. Ana doğru parçasının uzunluğu a, taban yarıçap uzunluğu r olan koninin yanal yüzeyinin alanı .... olur.
3. Taban yarıçap uzunluğu r, yüksekliği h olan silindirin yanal yüzey alanı............olur.
4. Bir kürenin yarıçap uzunluğu 3 cm, ikinci bir kürenin yarıçap uzunluğu 9 cm dir. Bu kürelerin hacimlerinin oranı.................olur.
5. Bir kürenin yüzey alanı, o kürenin en büyük dairesinin alanının .... katıdır.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6. Bir koninin ana doğru parçasının uzunluğu 12 cm, yüksekliği 6 cm olduğuna göre hacmi kaç santimetreküptür? (   )
7. Bir koninin ana doğru parçasının uzunluğu 8 santimetredir. Koninin ana doğru parçasının tabanı kestiği noktadan geçen çap ile yaptığı açı 60° olduğuna göre koninin yüksekliği kaç santimetredir? (   )
8. Bir kürenin yarıçap uzunluğu yüzde 10 artırıldığında hacmi yaklaşık yüzde kaç artar? (   )
9. Çap uzunluğu 8 cm olan bir küre içine yerleştirilebilecek en büyük küpün bir ayrıtının uzunluğu kaç santimetredir? (   )

a) $4\sqrt{3}$
b) 33,1
c) $216\,\pi$
ç) 16
d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
e) $5\sqrt{3}$
f) 16

C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

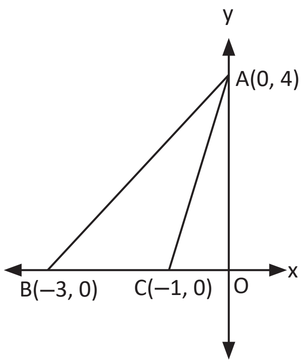
10. Yağmur suları 50 cm uzunluğunda, 100 cm genişliğindeki dikdörtgen tabanlı bir konteynerde biriktiriliyor. Su seviyesi 31,4 cm ye ulaştığında biriken su, taban yarıçap uzunluğu 20 cm olan silindirik boş bir bidona boşaltılıyor. Bidondaki suyun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz. ($\pi = 3{,}14$ alınız.)

11.



Bir sirk çadırı biri silindir, diğeri koni şeklinde iki parçadan oluşmaktadır. Silindirin yüksekliği 15 metre, taban yarıçap uzunluğu 15 metre, çadırın yüksekliği 23 metredir. Çadırın yapımında kullanılan brandanın metrekaresi 80 TL dir. Çadırın silindir ve koni şeklindeki parçalarının tabanlarında branda kullanılmadığına göre toplam branda maliyetinin <u>en az</u> kaç TL olduğunu bulunuz. ($\pi = 3{,}14$ alınız.)

12. Yandaki şekilde köşelerinin koordinatları A(0, 4), B(−3, 0) ve C(−1, 0) olan bir ABC üçgeni verilmiştir. Bu üçgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacminin kaç birimküp olduğunu bulunuz.



13. Boyu 20 santimetre, taban yarıçap uzunluğu 4 santimetre olan silindirik bir mum, yakıldıktan 4 saat sonra tamamen erimektedir. Aynı malzemeden yapılmış ikinci bir mumun taban yarıçap uzunluğu 3 santimetredir. İkinci mum, yakıldıktan 6 saat sonra tamamen eridiğine göre bu mumun yüksekliğinin kaç santimetre olduğunu bulunuz.

14. İçinde küresel boşluk bulunan bir metal kürenin iç çap uzunluğu 4 cm, dış çap uzunluğu 16 cm dir. Bu metal küre eritilerek taban yarıçap uzunluğu 12 cm olan bir koni oluşturuluyor. Oluşturulan koninin yüksekliğinin kaç santimetre olduğunu bulunuz.

15. Bir ayrıtının uzunluğu 20 santimetre olan küp şeklindeki bir kütük yontularak bir küre yapılacaktır. Oluşabilecek en büyük kürenin yüzey alanının kaç santimetrekare olacağını bulunuz.

16.



Dünya Çocuk Günü nedeni ile bir çocuk yuvasında gerçekleştirilecek programda görseldeki gibi bir pasta 27 çocuğa eşit olarak dağıtılacaktır.
Silindir biçiminde olan iki katlı pastanın birinci katının yüksekliği 40 cm, yarıçap uzunluğu 20 cm; ikinci katının yüksekliği 20 cm, yarıçap uzunluğu 10 cm olduğuna göre her bir çocuğa düşecek pasta diliminin kaç dm^3 olacağını bulunuz. ($\pi = 3$ alınız.)

17. Hacmi 20 santimetreküp olan metal cisim eritilerek yarıçap uzunluğu 10 santimetre olan bir silindir kabın içine dökülüyor. Silindirin içindeki cismin yüksekliğinin kaç santimetre olduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

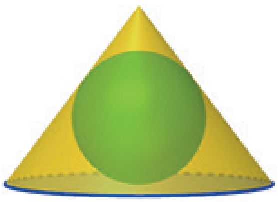
18. Taban çap uzunluğu 40 cm olan silindirik bir kabın içinde 44π litre su vardır. Suyun yüksekliği kaç desimetredir? (1 litre = 1 dm^3)

A) 5 B) 8 C) 11 D) 15 E) 19

19. Bir koninin hacmi 60π santimetreküp, taban alanı 18π santimetrekare olduğuna göre koninin yüksekliği kaç santimetredir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

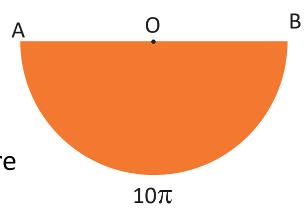
20.



Yarıçap uzunluğu 6 cm, yüksekliği 8 cm olan şekildeki dik dairesel koninin içine konulabilecek en büyük kürenin hacmi kaç santimetreküptür?

A) 36 π B) 27 π C) $10\sqrt{5}\,\pi$ D) $5\sqrt{5}\,\pi$ E) 12 π

21. Şekilde merkez açısı 180°, AB yayının uzunluğu 10π cm olan O merkezli daire dilimi verilmiştir. Daire diliminin OA ve OB kenarları çakıştırılarak bir dik koni elde ediliyor. Elde edilen koninin hacmi kaç santimetreküptür?



A) $\frac{13\pi}{3}$ B) $\frac{125\sqrt{3}\,\pi}{3}$ C) $\frac{100\sqrt{3}\,\pi}{3}$ D) $\frac{40\pi}{3}$ E) $\frac{80\sqrt{3}\,\pi}{3}$

22. Yanal yüzeyinin alanı 60π olan bir koninin ana doğru parçasının uzunluğu 10 birim olduğuna göre bu koninin hacmi kaç birimküptür?

A) 96 π B) 122 π C) 220 π D) 256 π E) 288 π

23.



Yukarıda Kudüs'te bulunan Kubbetü's-Sahra adlı yapının fotoğrafı verilmiştir. Yapı, kürenin yarısı biçimli ve altın kaplamalı bir kubbeye sahiptir. Kubbenin yarıçap uzunluğunun 10 metre olduğu bilindiğine göre kaplama işinde kaç metrekarelik alanda altın kullanılmıştır?

A) 100 π B) 122 π C) 180 π D) 200 π E) 296 π

24. Taban yarıçap uzunluğu 12 cm olan silindirik bir kabın içinde bir miktar su vardır. Kabın içine yarıçap uzunluğu 1,2 cm olan küre şeklinde bilyelerden atılınca suyun seviyesi 6 cm yükseldiğine göre kaba kaç tane bilye atılmıştır?

A) 150 B) 300 C) 375 D) 400 E) 450

VERİ, SAYMA VE OLASILIK

7. OLASILIK

7.1. Koşullu Olasılık
7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

Bu bölümde

- Koşullu olasılığı açıklayarak problemler çözmeyi,
- Bağımlı ve bağımsız olayları açıklayarak bu olayların gerçekleşme olasılıklarını hesaplamayı,
- Bileşik olayı açıklayarak bu olayın gerçekleşme olasılığını hesaplamayı,
- Deneysel olasılık ile teorik olasılığı ilişkilendirmeyi

öğreneceksiniz.



KAVRAMLAR

Koşullu Olasılık, Bağımlı Olaylar, Bağımsız Olaylar, Bileşik Olay, Deneysel Olasılık, Teorik Olasılık

HAZIRLIK ÇALIŞMASI



Yalnızca kıymalı, peynirli ve patatesli pidelerin satıldığı bir pideciye üç müşteri geliyor.
Müşteriler pide tercihlerini nasıl yapabilirler?
Üç müşteriden birinin kıymalı pide tercih etmesi durumunda diğerlerinin seçimleri nasıl olabilir?
Müşterilerden birinin patatesli pide tercih ettiği bilindiğine göre diğerlerinin de aynı tercihi yapma olasılığı nasıl ifade edilebilir?

7.1. Koşullu Olasılık

7.1.1. Koşullu Olasılık

Matematik Tarihi

Milattan önce 4. yüzyılda yaşamış Aristo'nun eserlerinde **olasılık**, bir olayın rastgele gerçekleşmesi durumunu ifade etmek için kullanılan kavramdır. Olasılık kavramının matematiğin bir dalı olarak ortaya çıkışı 17. yüzyılın ortalarına denk gelir. Blaise Pascal (Bileys Paskal), kendisine yöneltilen bir olasılık sorusunu çözmekle yetinmeyip bu konuda çalışmalar başlatmıştır. Pascal, çağdaşı Pierre de Fermat (Piyer dö Ferma) ile bu alanda sık sık fikir alışverişinde bulunmuştur. İkili, matematiğin önemli bir dalı olan **olasılık kuramı**nı ortaya atmıştır. Olasılık kuramı günümüzde bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim, bankacılık, sigortacılık, kalite kontrolü, gazların kinetik teorisi, mekanik gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Doğacak bir bebeğin cinsiyeti ve göz rengi, bir spor müsabakasının sonucu, aylık enflasyon beklentileri, hava tahmin raporları gibi belirsizlik içeren durumlara günlük hayatta sıklıkla rastlanabilir. Belirsizliklere dair tahmin yürütülürken olasılık kavramına başvurulur. Tahmin yürütülen olayların sonuçları pek çok etkene bağlı olabilir.

Hatırlatma

E örnek uzayında A ve B iki olay olmak üzere A olayının olasılığı $P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)}$ şeklindedir.

Herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), gerçekleşmeme olasılığı P(A') olmak üzere $P(A) + P(A') = 1$ olur.

Bir deneyin tüm sonuçlarının oluşturduğu kümeye **örnek uzay** denir ve bu küme **E** ile gösterilir. Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.

Bir olayın gerçekleşme değerinin [0,1] ndaki bir reel sayı ile gösterilmesine bu **olayın olma olasılığı** denir.

İki olayın birleşiminin olasılığı $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.

Aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylara **ayrık olaylar** denir.

A ve B ayrık olaylar ise $P(A \cap B) = 0$ ve $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

E eş olumlu örnek uzayında A ve B iki olay olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşme olasılığına **A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı** denir ve bu olasılık **P(A|B)** şeklinde gösterilir.

A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı, $P(B) \neq 0$ olmak üzere

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ şeklindedir.

$P(A \cap B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(E)}$, $P(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)}$ ve $s(B) \neq 0$ olmak üzere

$$P(A|B) = \frac{s(A \cap B)}{s(B)}$$ şeklindedir.

P(A|B)

Gerçekleşmesi istenen olay ← → Gerçekleşmiş olay

1. Örnek

E örnek uzayında A ve B olayları verilsin.

$P(B) = \frac{1}{3}$ ve $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ olduğuna göre A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığını bulunuz.

Çözüm

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$ olur.

2. Örnek

E örnek uzayında A ve B olayları verilsin. $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{1}{2}$ ve $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ olduğuna göre B olayının A olayına bağlı koşullu olasılığını (P(B|A)) bulunuz.

Çözüm

$P(A) + P(A') = 1$ olduğundan $P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ve

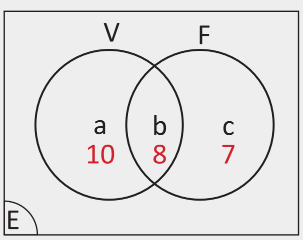
$P(B) + P(B') = 1$ olduğundan $P(B) = 1 - P(B') \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ olur.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ olur. Buradan

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$ olur.

3. Örnek

25 kişilik bir sınıfta her öğrenci futbol ve voleybol oyunundan en az birini oynamaktadır. Futbol oynayan 15, voleybol oynayan 18, her iki oyunu oynayan 8 öğrenci vardır. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin voleybol oynadığı bilindiğine göre bu öğrencinin futbol da oynuyor olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Sınıfta 25 öğrenci olduğundan örnek uzayın eleman sayısı s(E) = 25 olur.

Voleybol oynayanların kümesi “V”, futbol oynayanların kümesi “F” ve her iki oyunu oynayanların kümesi “F∩V” ile gösterilsin.

$a + b + c = 25$

$a + b = 18$

$b + c = 15$ olur. Buradan $a = 10$, $b = 8$, $c = 7$ olur. Buna göre $s(F) = 15$, $s(V) = 18$ ve $s(F \cap V) = 8$ olur. Buradan voleybol oynayan öğrencinin aynı zamanda futbol da oynuyor olma olasılığı

$P(F|V) = \frac{s(F \cap V)}{s(V)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ olur.

4. Örnek

Bir çift zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olduğu biliniyor. Buna göre bu sayıların her ikisinin de asal olma olasılığını bulunuz.

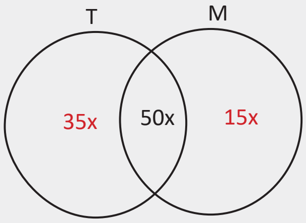


Çözüm

Zarlar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olma olayı S_8, asal olma olayı A, üst yüze gelen sayıların toplamının 8 ve asal olma olayı $S_8 \cap A$ olsun. Buradan
$S_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ olduğundan $s(S_8) = 5$ olur.
Bir zarın üst yüzüne gelebilecek asal sayılar 2, 3, 5 olacağından
$A = \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (5, 2), (5, 3)\}$ olur.
İki zarın üst yüzüne gelebilecek ve toplamı 8 olan asal sayılar (3, 5) ya da (5, 3) biçimindedir.
Buradan $S_8 \cap A = \{(3, 5), (5, 3)\}$ ve $s(S_8 \cap A) = 2$ olur.
O hâlde üst yüze gelen sayıların asal olma olasılığı $P(A|S_8) = \dfrac{s(S_8 \cap A)}{s(S_8)} = \dfrac{2}{5}$ olur.

5. Örnek

Bir okuldaki öğrencilerin tamamı matematik ve Türkçe derslerinin en az birinden kurs kaydı yaptırmıştır. Bu öğrencilerin %65 i matematik, %85 i Türkçe ve %50 si her iki dersten kurs kaydı yaptırmıştır. Okuldan rastgele seçilen bir öğrencinin Türkçe dersinden kurs kaydı yaptırdığı bilindiğine göre bu öğrencinin matematik dersinden de kurs kaydı yaptırmış olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Okuldaki öğrenci sayısı 100x olsun. Seçilen öğrencinin matematikten kayıt yaptırmış olması olayı M ise $s(M) = 65x$, Türkçeden kayıt yaptırmış olması olayı T ise $s(T) = 85x$, her iki dersten kayıt yaptırmış olması olayı $M \cap T$ ise $s(M \cap T) = 50x$ olur.
Seçilen öğrencinin Türkçeden kurs kaydı yaptırdığı bilindiğine göre bu öğrencinin matematik dersinden de kurs kaydı yaptırmış olma olasılığı

$P(M|T) = \dfrac{s(M \cap T)}{s(T)} = \dfrac{50x}{85x} = \dfrac{10}{17}$ olarak bulunur.

6. Örnek

Bir okuldaki velilerin bir kısmı öğrencilerin okula serbest kıyafetle, diğer bir kısmı üniforma ile gitmesi gerektiği fikrini savunmaktadır. Anket yöntemi ile 220 velinin bu konudaki fikirleri tespit edilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki gibidir.

	Serbest kıyafeti tercih eden	Üniformayı tercih eden	Kararsız	Toplam
Kadın veli	27	56	6	89
Erkek veli	50	72	9	131
Toplam veli	77	128	15	220

220 veli içerisinden rastgele seçilen birinin
a) Kadın olduğu bilindiğine göre serbest kıyafeti tercih etmiş olma olasılığını,
b) Üniformayı tercih ettiğine göre erkek olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

a) Seçilen kadın velinin serbest kıyafeti tercih etmiş olma olasılığı

$$P(\text{serbest} \mid \text{kadın veli}) = \frac{\text{serbest kıyafeti tercih eden kadın veli sayısı}}{\text{kadın veli sayısı}} = \frac{27}{89} \text{ olur.}$$

b) Üniformayı tercih eden velinin erkek olma olasılığı

$$P(\text{erkek veli} \mid \text{üniforma}) = \frac{\text{üniformayı tercih eden erkek veli sayısı}}{\text{üniforma tercih eden veli sayısı}} = \frac{72}{128} = \frac{9}{16} \text{ olur.}$$

Hatırlatma

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r li kombinasyonlarının sayısı

$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ şeklinde hesaplanır.

7. Örnek

Bir turist kafilesinde 5 Alman, 3 Yunan, 2 İngiliz turist vardır. Kafileden rastgele seçilecek iki turist Sultan Ahmet Camisi'ne götürülecektir. Ziyarete götürülecek iki turistin aynı ülke vatandaşı olduğu bilindiğine göre iki turistin de Alman vatandaşı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Turist kafilesinden 2 Alman, 2 Yunan veya 2 İngiliz seçilecektir. Bu kümenin eleman sayısı kombinasyon yardımı ile bulunur. İki turist, aynı ülke vatandaşı olacaktır ve 5 Alman, 3 Yunan ya da 2 İngiliz vatandaşı arasından seçilecektir.
Seçilecek iki turistin aynı ülke vatandaşı olma olayı A olsun. Bu durumda
$s(A) = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 10 + 3 + 1 = 14$ olur.
Alman vatandaşı olma olayı B olsun. Bu durumda
seçilen iki turistin Alman vatandaşı ve aynı ülke vatandaşı olma olayı $A \cap B$ olmak üzere
$s(A \cap B) = \binom{5}{2} = 10$ olur. Buradan
$P(B|A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ olur.

Sıra Sizde

Şehnaz, Yaşlılar Haftası nedeni ile bir huzurevinde yapılacak programda sınıfından 11 kız ve 18 erkek arkadaşı ile görevlidir. Programın sunuculuğunu yapacak öğrenciyi belirlemek için sınıftaki kızların isimleri kırmızı zarfa, erkeklerin isimleri mavi zarfa konularak torbaya atılıyor. Torbadan rastgele çekilen zarfın kırmızı olduğu bilindiğine göre programın sunuculuğunu yapacak öğrencinin Şehnaz olma olasılığını bulunuz.

7.1.2. Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

Bir zar ile bir madenî paranın birlikte atılma deneyinde zarın üst yüzeyine çift sayı gelmesi olayı paranın tura gelmesi olayını etkiler mi?

E örnek uzayında A ve B olayları için $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ olmak üzere B olayının gerçekleşme olasılığı A olayının gerçekleşmesini etkilemiyorsa **A olayı B olayından bağımsızdır** denir.

A ve B olayları bağımsız ise $\mathbf{P(A|B) = P(A)}$ olur. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olduğundan

$P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olur.

A ile B bağımsız olaylar ise $\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}}$ olur.

A olayının gerçekleşmesi B olayının gerçekleşmesini etkiliyorsa A ve B olaylarına **bağımlı olaylar** denir.

Buna göre A ile B bağımlı olaylar ise $\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}}$ olur.

8. Örnek

Bir firma, iş yerinde bulunan 2 makinede CD üretimi yapmaktadır. CD ler bir kutuda 120 tane olacak şekilde paketlenmektedir. Üretilen CD lerden bazıları bozuk çıkmaktadır. Bir kutuda yer alan CD lerin durumunu gösteren tablo aşağıda verilmiştir.

	Sağlam CD	Bozuk CD	Toplam CD
1. Makine	42	6	48
2. Makine	63	9	72
Toplam	105	15	120

Kutudan rastgele bir CD alındığında CD nin 1. makineden olması olayı M_1, sağlam olması olayı S olsun. Buna göre M_1 olayı ile S olayının birbirinden bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Seçilen CD nin 1. makineden olması ile sağlam olması olayları birbirinden bağımsız ise $P(S|M_1) = P(S)$ olmalıdır.

$P(S|M_1) = \dfrac{s(S \cap M_1)}{s(M_1)}$ olur.

1. makineden çıkan sağlam CD lerin sayısı $s(S \cap M_1) = 42$ ve

1. makineden çıkan toplam CD lerin sayısı $s(M_1) = 48$ olduğundan

$P(S|M_1) = \dfrac{42}{48} = \dfrac{7}{8}$ olur.

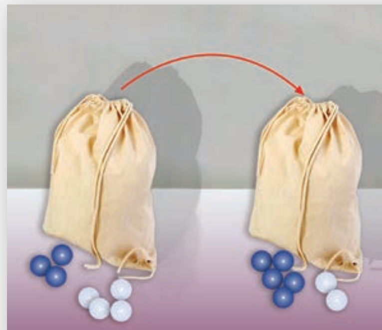
$P(S) = \dfrac{s(S)}{s(E)} = \dfrac{105}{120} = \dfrac{7}{8}$ olur.

$P(S|M_1) = P(S)$ olduğundan M_1 ile S olayları bağımsızdır.

9. Örnek

İki torbadan birincisinde 3 mavi, 4 beyaz; ikincisinde 5 mavi, 2 beyaz özdeş bilye vardır. Birinci torbadan rastgele bir bilye çekilip ikinci torbaya atılıyor. Ardından ikinci torbadan rastgele çekilecek bilyenin beyaz olma olasılığını bulunuz.

Çözüm



1. torba 2. torba

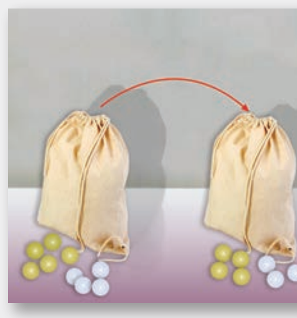
Birinci torbadan beyaz bilye çekme olayı B_1, mavi bilye çekme olayı M_1 olsun.
İkinci torbadan beyaz bilye çekme olayı B_2 olsun.
İkinci torbadan çekilecek bilyenin beyaz olma olasılığı birinci torbadan çekilip ikinci torbaya atılan bilyenin rengine bağlıdır.
Bu durumda M_1 ile B_2 ve B_1 ile B_2 bağımlı olaylardır. Birinci ve ikinci torbadan beyaz bilye çekme olayı $B_1 \cap B_2$, 1. torbadan mavi bilye ve 2. torbadan beyaz bilye çekme olayı $M_1 \cap B_2$ olur.
O hâlde ikinci torbadan çekilecek bilyenin beyaz olma olasılığı

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(M_1 \cap B_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{8} = \frac{12}{56} + \frac{6}{56} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28} \text{ olur.}$$

10. Örnek

1. torbada 5 sarı, 4 beyaz bilye; 2. torbada 4 sarı, 3 beyaz bilye vardır. Rastgele seçilen torbanın birinden rastgele bir bilye çekildiğinde bilyenin beyaz olduğu bilindiğine göre bu bilyenin 1. torbadan çekilmiş olma olasılığını bulunuz.

Çözüm



Seçilen torbanın 1. torba olması olayı T_1,
seçilen torbanın 2. torba olması olayı T_2,
çekilen bilyenin beyaz olma olayı B,
1. torba seçildiğinde bilyenin beyaz gelme olasılığı $P(B|T_1)$,
2. torba seçildiğinde bilyenin beyaz gelme olasılığı $P(B|T_2)$,
çekilen bilyenin beyaz ve 1. torbadan olma olasılığı $P(T_1 \cap B)$,
çekilen bilyenin beyaz ve 2. torbadan olma olasılığı $P(T_2 \cap B)$ olsun.
1. torba seçildiğinde beyaz gelme olasılığı veya 2. torba seçildiğinde beyaz gelme olasılığı

$$P(B) = P(T_1 \cap B) + P(T_2 \cap B)$$

$$P(B) = P(T_1) \cdot P(B|T_1) + P(T_2) \cdot P(B|T_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \underset{(7)}{\frac{4}{18}} + \underset{(9)}{\frac{3}{14}} = \frac{28}{126} + \frac{27}{126} = \frac{55}{126} \text{ olur. Buradan}$$

bilyenin beyaz olduğu bilindiğine göre 1. torbadan çekilmiş olma olasılığı

$$P(T_1|B) = \frac{P(T_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{55}{126}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{55}{126}} = \frac{28}{55} \text{ olur.}$$

11. Örnek



İçerisinde özdeş 5 sarı ve 7 mavi top bulunan bir torbadan, çekilen top geri konulmak üzere art arda iki top çekiliyor. Buna göre

a) Çekilen topların ikisinin de sarı olma olasılığını bulunuz.

b) Çekilen topların birinin sarı, diğerinin mavi olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Çekilen toplar geri konulacağı için birinci topun çekilme olasılığı ikinci topun çekilme olasılığını etkilemez.

a) Çekilen topların ikisinin de sarı olma olasılığı $P(S) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$ olur.

b) Topların birinin sarı diğerinin mavi olması;

birincinin mavi, ikincinin sarı ya da

birincinin sarı, ikincinin mavi olması demektir.

$P(M \cap S) + P(S \cap M) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{70}{144} = \frac{35}{72}$ olur.

12. Örnek

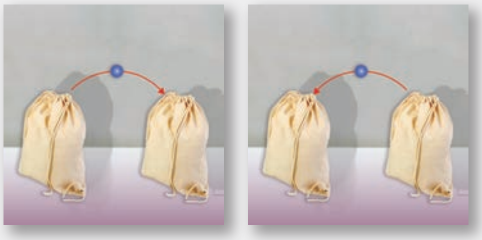


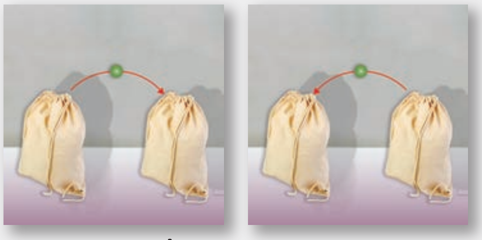
İki torbadan her birinde özdeş 4 mavi, 5 yeşil bilye bulunmaktadır. Birinci torbadan bir bilye alınıp ikinci torbaya atılıyor. Ardından ikinci torbadan bir bilye alınıp birinci torbaya atılıyor. Renk bakımından ilk durumun elde edilme olasılığını bulunuz.

Çözüm

M: Mavi Y: Yeşil

Renk bakımından ilk durumun elde edilebilmesi için birinci torbadan alınıp ikinci torbaya atılan bilyenin rengi ile ikinci torbadan alınıp birinci torbaya atılan bilyenin rengi aynı olmalıdır.





Birinci durum

1. torba 2. torba

M M

$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10}$

+

İkinci durum

1. torba 2. torba

Y Y

$\frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10}$

$P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$ olur.

13. Örnek

İçerisinde özdeş 4 mavi, 4 sarı ve 6 kırmızı top bulunan bir torbadan, geri konulmamak şartıyla art arda 3 top çekiliyor.
a) Çekilen 3 topun birbirinden farklı renkte olma olasılığını bulunuz.
b) Çekilen 3 toptan en çok 2 tanesinin sarı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

1. Yol

Çekilen top geri konulmadığından topların sayısında azalma olur. Örneğin kırmızı top çekilmişse kırmızıların ve tümünün sayısında azalma gerçekleşir.

a) M mavi, S sarı, K kırmızı olmak üzere toplar M, S, K harflerinin farklı sıralama sayıları (permutasyon) kadar farklı şekilde çekilebilir.

Bu harfler $3! = 6$ farklı şekilde sıralanır.

6 elemandan (MSK, MKS, KMS, KSM, SMK, SKM) her birinin olasılığı aynıdır.

$P(M \cap S \cap K) = \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{6}{12} = \frac{4}{91}$,

$P(K \cap M \cap S) = \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{91}$ olur. Buradan

Çekilen 3 topun birbirinden farklı renkte olma olasılığı $6 \cdot \frac{4}{91} = \frac{24}{91}$ olur.

b) Tüm olayların olma olasılığı içinden her üçünün sarı olma olasılığı çıkarıldığında en çok ikisinin sarı olduğu olasılık bulunur.

Örnek uzay olasılığı $P(E) = 1$, her üçünün sarı olma olasılığı $P(S) = \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{91}$

Çekilen 3 toptan en çok ikisinin sarı olma olasılığı $1 - \frac{1}{91} = \frac{90}{91}$ olur.

2. Yol

a) 3 topun birbirinden farklı olma durumu $\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$

Örnek uzay eleman sayısı $\binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 14 \cdot 13 \cdot 2$ olur.

3 topun da farklı renkte olma olasılığı $\frac{96}{14 \cdot 13 \cdot 2} = \frac{24}{91}$ olur.

b) En çok ikisinin sarı olma olayının eleman sayısı

$$\binom{4}{0} \cdot \binom{10}{3} + \binom{4}{1} \cdot \binom{10}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{1} = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 45 + 6 \cdot 10$$

$$= 360 \text{ olur.}$$

3 toptan en çok ikisinin sarı olma olasılığı $\frac{360}{14 \cdot 13 \cdot 2} = \frac{90}{91}$ olur.

Sıra Sizde

Bir torbada özdeş 4 kırmızı, 3 mavi, 2 yeşil bilye bulunmaktadır. Her biri çekildikten sonra geri konulmak şartıyla 2 bilye çekiliyor. Çekilen iki bilyenin de yeşil olma olasılığını bulunuz.

7.1.3. Bileşik Olaylar

Bir deneyin tüm çıktılarına **olay**, sadece bir çıktısından oluşan kümeye **basit olay**, birden çok çıktısından oluşan kümeye **bileşik olay** denir.
Bir zar atma deneyinde zarın üst yüzeyinin 6 olması basit olay, asal sayı olması bileşik olaydır.

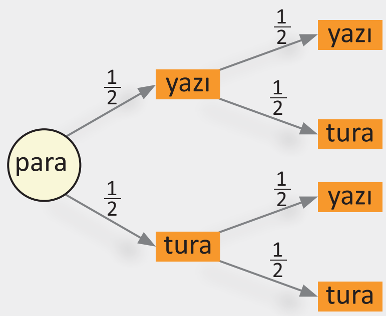
14. Örnek

Art arda 2 kez atılan bir madenî paranın ikinci atışta tura gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm

Sorunun çözümü için ağaç diyagramı (şema) kullanılabilir.
Ağaç diyagramına göre ikinci atışta tura gelme olasılığı

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ olur.



15. Örnek

Bir zar ile bir madenî para birlikte atılıyor. Paranın yazı veya zarın asal sayı gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm

Paranın yazı gelme olayı A olsun. O hâlde $P(A)=\frac{1}{2}$ olur.

Zarın asal sayı gelme olayı B olsun. O hâlde $P(B)=\frac{1}{2}$ olur.

Paranın yazı gelme olayı ile zarın asal sayı gelme olayı birbirini etkilemediğinden bu olaylar bağımsız olaylardır. Buradan $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ olur.
Paranın yazı veya zarın asal sayı gelme olasılığı

$$P(A \text{ veya } B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \text{ olur.}$$

16. Örnek

Bir sınıftaki 12 erkek öğrencinin 4 ü gözlüklü, 18 kız öğrencinin 7 si gözlüksüzdür. Sınıftan seçilen herhangi bir öğrencinin kız veya gözlüklü olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

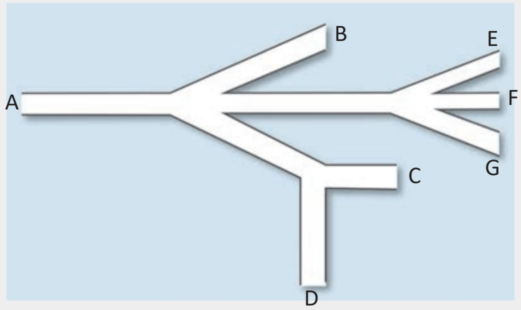
Verilen bilgiler yardımıyla aşağıdaki tablo oluşturulur.

	Gözlüklü	Gözlüksüz
Kız	11	7
Erkek	4	8

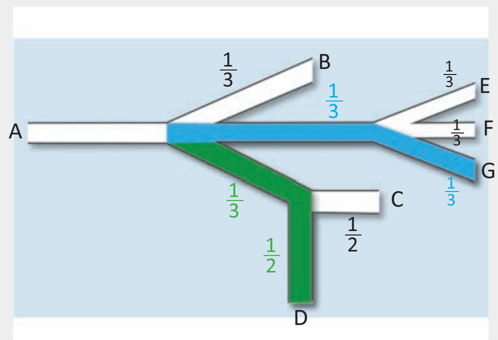
Kız veya gözlüklü öğrenciler 11 + 7 + 4 = 22 kişidir. Buradan

$P(K\cup G)=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$ olur.

17. Örnek



Şekildeki labirentte A noktasından yürümeye başlayan bir kişi yol ayrımlarının tümünde rastgele bir yol seçmiş ve seçtiği hiçbir yoldan dönmemiştir. Buna göre bu kişinin G veya D noktasından çıkmış olma olasılığını bulunuz.



Çözüm

Şekildeki labirente göre bu kişinin D noktasından çıkmak için yeşil yolu, G noktasından çıkmak için mavi yolu takip etmesi gerekir. Bu durumda bu kişinin

D noktasından çıkma olasılığı $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ olur.

G noktasından çıkma olasılığı $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ olur.

Kişinin aynı anda hem G den hem de D den çıkması imkânsız olduğundan $P(D \cap G) = 0$ olur.

Buradan D veya G noktasından çıkma olasılığı $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$ olur.

18. Örnek

İçerisinde turuncu, mavi ve kırmızı özdeş bilyelerin bulunduğu torbadan çekilen bilyenin mavi olma olasılığının $\frac{1}{6}$ ve turuncu olma olasılığının $\frac{1}{3}$ olduğu biliniyor. Torbada 6 kırmızı bilye bulunduğuna göre toplam bilye sayısını bulunuz.

Çözüm

Torbada 6 kırmızı, a tane mavi, b tane turuncu bilye olsun. Bu durumda $s(E) = 6 + a + b$ olur.

Bilyenin mavi olma olasılığı $P(M) = \frac{a}{6 + a + b} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow 5a - b = 6$ olur. (1)

Bilyenin turuncu olma olasılığı $P(T) = \frac{b}{6 + a + b} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 2b - a = 6$ olur. (2)

1 ve 2. denklem ortak çözüldüğünde

$$\begin{array}{l} 2/\ \ 5a - b = 6 \\ \quad\ \ 2b - a = 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 10a - \cancel{2b} = 12 \\ \cancel{2b} - a \ = \ 6 \\ \hline \end{array}$$

$9a = 18 \Rightarrow a = 2$ olur.

Bulunan a değeri denklemlerin birinde yerine yazıldığında $b = 4$ olur.

O hâlde torbada $6 + 2 + 4 = 12$ bilye bulunur.

Sıra Sizde

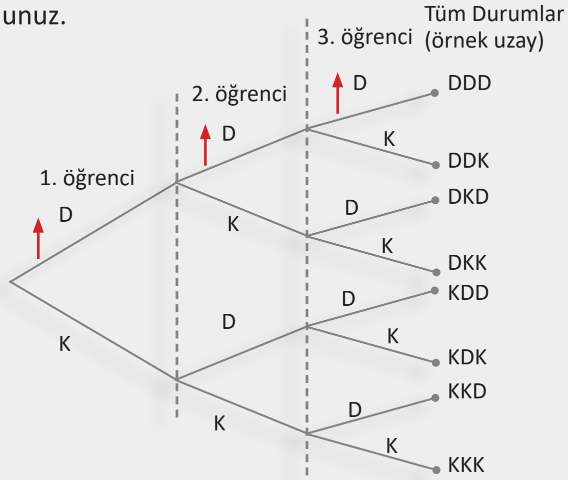
Bir kutuda üzerlerinde 2, 4, 6 rakamlarının yazılı olduğu 3 kart vardır. Kutudan bir kart çekilip zar atılıyor. Çekilen kartın 2 ve atılan zarın çift sayı gelme olasılığını bulunuz.

19. Örnek

Sekizinci sınıf öğrencilerinden rastgele seçilen 3 öğrenciye liseye geçiş sınavlarıyla ilgili fikirleri sorulmuştur. Öğrencilerin bir kısmı sınavların gerekliliğini savunmuş, diğer kısmı sınavlara karşı çıkmıştır.
Bir ağaç diyagramı çizerek
a) En az ikisinin sınavı savunma olayını,
b) Üçünün de sınava karşı çıkma olayını,
c) Yalnız birinin sınavı savunma olayını bulunuz.

Çözüm

D = Sınavı savunuyor.
K = Sınava karşı çıkıyor.
Yandaki ağaç diyagramına göre
a) A = {KDD, DKD, DDK, DDD}
b) B = {KKK}
c) C = {KKD, KDK, DKK}



7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

7.2.1. Deneysel Olasılık ile Teorik Olasılığın İlişkilendirilmesi

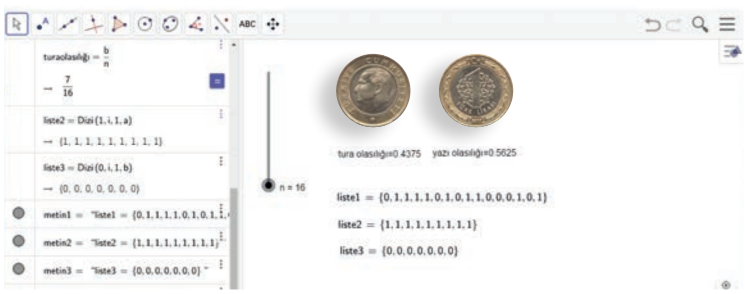
Bir deneyde ortaya çıkabilecek tüm sonuçlar göz önünde bulundurularak yapılan matematiksel hesaplamaya **teorik olasılık** denir.
Aşağıda bir zar atma olayında zarın üst yüzeyine 3 gelme olasılığı hesaplanmıştır.
Zarın birbirine eşit 6 yüzeyi vardır ve bu yüzeylerden bir tanesi 3 ile gösterilir.
O hâlde $P(3) = \frac{1}{6}$ olur.
Bir olayın olma olasılığını yapılan denemelerin sonuçlarına göre bulmaya **deneysel olasılık** denir. Olayın gerçekleşme sayısının deney sayısına oranına **olayın deneysel olasılığı** denir.

Not

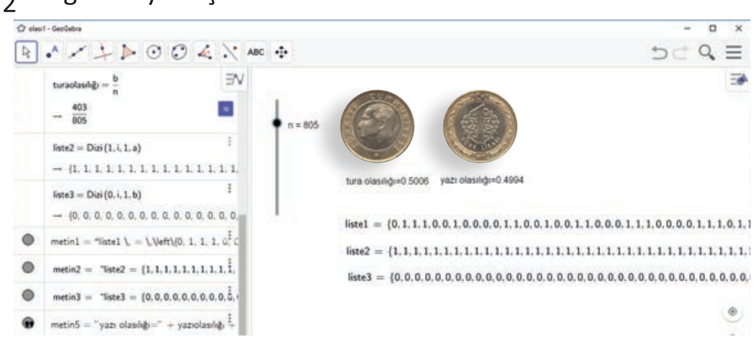
Bir örnek uzayda deneysel olasılık değeri, deneme sayısı arttıkça teorik olasılık değerine yaklaşır.

1. Uygulama: Deneysel Olasılık

Bir n sürgüsü oluşturunuz. Sürgünün **minimum** değerini 1, **maksimum** değerini 1000, **artış** değerini 1 yapınız. n sürgüsü, para atma denemelerinin sayısını gösterir.
Girişe **dizi** yazınız. Oluşan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş** yerlerine sırasıyla **rastgele(0,1)**, **i**, **1**, **n** yazınız.
Rastgele(0,1) ifadesinde paranın tura gelmesi 0, yazı gelmesi 1 ile gösterilir.
Sürgüyü sağa sola hareket ettirdiğinizde elemanları 0 ve 1 olan **l1** oluşacaktır. Yazı ve turanın kaçar kez geldiğini gösteren l1 kümesi aynı zamanda örnek uzaydır.
Girişe **eğer** yazınız. Oluşan satırdaki **şart** kısmına **x==1**, **liste** kısmına **l1** yazdığınızda örnek uzay kümesinde kaç adet 1 (yazı) olduğunu görebilirsiniz.
Girişe **eğer** yazınız. Oluşan satırdaki **şart** kısmına **x==0**, **liste** kısmına **l1** yazdığınızda örnek uzay kümesinde kaç adet 0 (tura) olduğunu görebilirsiniz.
Girişe **yazıolasılığı=a/n** yazdığınızda yazı gelme olasılığını, **turaolasılığı=b/n** yazdığınızda tura gelme olasılığını görebilirsiniz.
Girişe **dizi** yazınız. Oluşan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş** yerlerine sırasıyla **1**, **i**, **1**, **a** yazdığınızda kaç kez yazı geldiğini gösteren **l2** yi elde edebilirsiniz.
Girişe **dizi** yazınız. Oluşan satırda **ifade**, **değişken**, **başlangıç**, **bitiş** yerlerine sırasıyla **0**, **i**, **1**, **b** yazdığınızda kaç kez tura geldiğini gösteren **l3** ü elde edebilirsiniz.
Giriş penceresinde bulunan l1, l2 ve l3 ü imleç ile tutarak grafik penceresine yerleştiriniz.



Metin ikonuna tıklayınız. Açılan penceredeki metin kutusuna **Yazı olasılığı** = yazınız. Pencerenin alt kısmındaki **Gelişmiş** butonuna tıklayınız. Açılan bölümdeki **GeoGebra** ikonunu tıklayınız. Ardından **yazıolasılığı** kısmına tıklayarak **tamam**a basınız. Yazı gelme olasılığı grafik ekranında ondalık olarak görülecektir. Tura gelme olasılığını görmek için metin kutusuna **Tura olasılığı** = yazarak aynı işlemi tekrarlayınız.
n sürgüsünü n=1 konumu ile n=1000 konumu arasında hareket ettiriniz. n değeri arttıkça yazı gelme olasılığı ile tura gelme olasılığı arasındaki farkın azaldığı görülür, her birinin teorik olasılığı olan $\frac{1}{2}$ değerine yaklaşılır.



Sürgünün maksimum değerini n=2000 yaparak para atma deneyini sürgünün bu değeri için gerçekleştiriniz. Bulduğunuz sonucu yorumlayınız.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

1. Bir deneyde elde edilen tüm çıktıların kümesine .... denir.
2. Bir deneyin sadece bir çıktısından oluşan kümeye .... denir.
3. A ve B olayları .... ise P(A∩B), A ile B olaylarının olma olasılıklarının çarpımına eşittir.
4. E örnek uzayının herhangi iki olayı A ve B olsun. B olayının gerçekleşmesi hâlinde A olayının gerçekleşmesi olasılığına A olayının B ye bağlı .... denir.

B) Aşağıda verilen numaralandırılmış ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5. Bir madenî para ile bir zarın birlikte atılma deneyinde paranın tura, zarın asal sayı gelme olasılığı ( ) olur.
6. Bağımsız A ve B olaylarının olasılıkları arasındaki ilişki ( ) olur.
7. A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı ( ) formülü ile bulunur.
8. Bir deneyin birden çok çıktısından oluşan kümeye ( ) denir.
9. Atılan bir zarın üst yüzüne gelen sayının 5 ten küçük olduğu bilindiğine göre bu sayının çift olma olasılığı ( ) olur.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ç) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

d) Bileşik olay

e) Basit olay

f) $\frac{1}{3}$

C) Aşağıdaki soruların çözümlerini altlarındaki boşluklara yazınız.

10. E örnek uzayında A ve B olayları veriliyor. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B') = \frac{1}{2}$ ve $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ olduğuna göre P(A|B) değerini bulunuz.

11. 2 zar atıldığında gelen sayıların toplamının 6 olduğu bilindiğine göre sayılardan birinin 2 olma olasılığını bulunuz.

12. 24 kişilik bir sınıfta 10 kız öğrenci vardır. Erkeklerin 4 ü, kızların 8 i gözlüklüdür. Sınıftan seçilen herhangi bir öğrencinin gözlüklü kız veya gözlüksüz erkek olma olasılığını bulunuz.

13. İki torbada özdeş bilyeler vardır. Birinci torbada 4 sarı, 3 mavi bilye; ikinci torbada 5 sarı, 2 mavi bilye bulunmaktadır. Birinci torbadan 1 bilye çekilip ikinci torbaya atılıyor. İkinci torbadan alınan 1 bilyenin sarı olma olasılığını ağaç diyagramı yöntemi ile bulunuz.

14. %60 ı İngiliz diğerleri Alman turistlerden oluşan bir kafilede Almanların %80 i ve İngilizlerin %70 i erkektir. Kafileden seçilen herhangi bir turistin İngiliz veya erkek olma olasılığını bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

15. Bir zar atıldığında tek sayı geldiği bilindiğine göre gelen sayının 2 den büyük olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

16. E örnek uzayında A ve B iki olay olsun. $P(A \cap B) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ ve $P(A') = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $P(A \cup B)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

17. İki ayrı turist kafilesinin birincisinde 5 Alman, 4 İngiliz; ikincisinde 6 Alman, 3 İngiliz turist vardır. Rastgele seçilen kafilenin birinden rastgele seçilen bir turistin Alman turist olduğu bilindiğine göre bu turistin birinci kafileden seçilmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{18}$ B) $\frac{10}{18}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{10}{11}$

18. Bir torbada özdeş 3 mavi, 3 yeşil ve 4 sarı top vardır. Çekilen top geri konulmak şartıyla art arda 2 top çekiliyor. İki topun da sarı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{15}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{4}{25}$ D) $\frac{3}{25}$ E) $\frac{2}{9}$

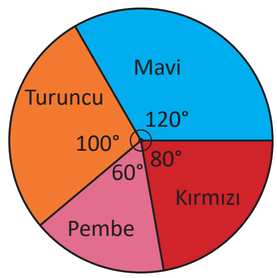
19. İki torbanın her birinde özdeş 4 kırmızı, 5 siyah top vardır. Birinci torbadan 1 top çekilip ikinci torbaya atılıyor. Ardından ikinci torbadan 1 top çekilip birinci torbaya atılıyor. Buna göre renk bakımından ilk durumun elde edilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{3}{10}$ E) $\frac{7}{10}$

20. İçerisinde özdeş 8 mor, 4 beyaz top bulunan torbadan art arda 3 top çekildiğinde birincinin beyaz, diğerlerinin birbirinden farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{8}{55}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{21}{55}$

21. Daire şeklinde olan ve tahtadan imal edilen bir cismin görseli yanda verilmiştir. Cisim, metal teller ile dört farklı bölgeye ayrılarak bu bölgeler mavi, pembe, turuncu ve kırmızıya boyanmıştır.



Atılan bir okun cisme isabet etmiş olduğu bilindiğine göre bu okun kırmızı bölgeye isabet etmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

22. 2 zar atıldığında gelen sayıların toplamı 7 den küçük olduğuna göre bu sayıların toplamının 5 e bölünebilme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{11}{5}$

23. Ömer'in bir soruyu çözme olasılığı $\frac{3}{4}$ ve Özlem'in aynı soruyu çözme olasılığı $\frac{2}{3}$ olduğuna göre Ömer'in veya Özlem'in bu soruyu çözme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{10}{12}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{12}$

24. Bir zar ve bir madenî para birlikte atılıyor. Paranın tura ve zarın üçten büyük gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

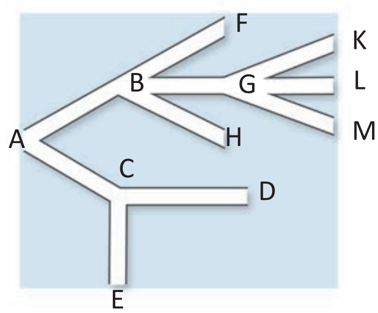
25. Atılan 2 zarın üst yüzeylerine gelen sayıların toplamının 7 olduğu bilindiğine göre bu sayıların ikisinin de asal olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

26. İki torbada özdeş bilyeler vardır. Birinci torbada 5 sarı, 2 beyaz; ikinci torbada 3 sarı, 4 beyaz bilye bulunmaktadır. Birinci torbadan bir bilye alınıp ikinci torbaya atılıyor. Ardından ikinci torbadan bir bilye alınıyor. İkinci torbadan alınan bilyenin sarı olduğu bilindiğine göre birinci torbadan alınan bilyenin de sarı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{12}$ B) $\frac{10}{13}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{3}{4}$

27.



Şekildeki labirentte A noktasından yürümeye başlayan bir kişi yol ayrımlarının tümünde rastgele bir yol seçmiştir. Seçtiği hiçbir yoldan dönüş yapmadığı bilindiğine göre bu kişinin E veya L noktasından çıkmış olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{36}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{1}{3}$

A

Alıştırmalar (19. sayfa)	
1.	2° 17' 10"
2.	a) 120° b) 150° c) 990°
3.	a) 70° b) 40° c) 80°
4.	63°
5.	47° 21' 35"
6.	28° 35' 6"
7.	a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{13\pi}{8}$
8.	$\frac{\pi}{4}$
9.	C ile D

Alıştırmalar (44. sayfa)	
1.	$-\frac{8}{17}$
2.	$\frac{2}{5}$
3.	$\lvert \cos x \rvert$
4.	$\sin^2 x$
5.	a) + b) + c) −
6.	b < a < c
7.	secx
8.	−cotx
9.	$\frac{1-x^2}{2x}$
10.	−1
11.	$\cot^2 x$
12.	$2x^2-1$
13.	0
14.	$\frac{89}{2}$
15.	$2\sec^2 x$

16.	$\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 2$

Alıştırmalar (49. sayfa)	
1.	$\sqrt{34}$
2.	60°
3.	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$
4.	$\sqrt{78}$
5.	$\frac{5}{6}$
6.	$\frac{7}{5}$

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
16.	a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $-\frac{5\pi}{6}$ c) 330° ç) -120°
18.	a) 190° b)300°
18.	a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{3}$
22.	0
22.	−7
26.	cotx
27.	$\cos^2 x$
31.	sinx + cosx
35.	−2cosα
38.	1
43.	x < y < z
50.	$\frac{2}{3}$
52.	$\frac{4\pi}{3}$
57.	a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$
64.	a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{3}$
66.	a) $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) $\frac{5\pi}{6}$
68.	a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{5}{12}$

Ölçme ve Değerlendirme

1.	1
2.	$2\sqrt{2}$
3.	$\frac{3\pi}{8}$
4.	$\frac{2\pi}{3}$
5.	$[0, \pi]$
6.	(cosα)
7.	e
8.	ç
9.	d
10.	a
11.	f
12.	b
13.	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
14.	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
15.	−sinx
16.	7
17.	$-\frac{4}{3}$
18.	1
19.	$\frac{7\pi}{8}$
20.	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
21.	$-\frac{3}{5}$
22.	2secx
23.	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
24.	$\frac{1}{2}$
25.	$\frac{3}{10}$
26.	$-\frac{8}{\sqrt{3}}$
27.	672 m
28.	a) 30 b) 12
29.	a) 0°0'21" b) 10° 42' 37"

30.	12,5
31.	55
32.	$40\sqrt{85}$
33.	b) 0,25 - 0,75
34.	a) 0,87 b) Mogadişu t = 4, t = 16 Baydabo t = 3, t = 15

35.	C
36.	D
37.	A
38.	E
39.	C
40.	B
41.	E
42.	C
43.	A
44.	B
45.	E
46.	B
47.	A
48.	D
49.	D
50.	A
51.	A
52.	A
53.	C
54.	C
55.	E
56.	B

Alıştırmalar (92. sayfa)	
1.	
2.	0, –1, –2, –3, –4
3.	–6
4.	3. bölge
5.	$5\sqrt{2}$
6.	(–7, 10)
7.	(–1, 6)
8.	a) 16 b) (–1, 0)
9.	6
10.	$3\sqrt{5}$
11.	$\sqrt{41}$
12.	(3, 2)
13.	(4, 0), (–2, 0)
14.	4
15.	15
16.	(6, –5)

Alıştırmalar (103. sayfa)	
1.	a) 1 b) $-\sqrt{3}$ c) –1 ç) yoktur d) 0
2.	a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) $\frac{2}{3}$ ç) $-\frac{5}{3}$
3.	a) $y = 3x - 1$ b) $y = -x + 1$ c) $y = 2x - 2$ ç) $3y - x + 12 = 0$
4.	a) $y = -\sqrt{3}\,x + 2$ b) $y = 3$ c) $x - y + 5 = 0$
5.	$y = x + \sqrt{3}$
6.	a) $4y - x - 17 = 0$ b) $3y + x - 10 = 0$ c) $y - x + 2 = 0$ d) $3x + 2y - 5 = 0$

Alıştırmalar (114. sayfa)	
1.	10
2.	$y = 16$
3.	9
4.	–4
5.	24
6.	$\frac{25}{2}$

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
79.	7
80.	11
80.	12
84.	11
86.	–4
91.	$-\frac{4}{5}$
95.	$\frac{1}{3}$
101.	4
106.	–6
106.	2
113.	–6
115.	$k = -13$ $k = -65$

Ölçme ve Değerlendirme

1.	x ekseni
2.	eğim açısı
3.	paralel
4.	eşit
5.	3.
6.	ç
7.	c
8.	a
9.	b
10.	e
11.	f
12.	3
13.	–9 ve 9
14.	0
15.	–6
16.	1
17.	1
18.	6
19.	6
20.	a) 4x b) 3,6x – 1746 c) 1560
21.	Ulaşır.
22.	B
23.	D
24.	E
25.	C
26.	C
27.	A
28.	E
29.	A
30.	B
31.	A

Alıştırmalar (132. sayfa)	
1.	a) $f(x)=\frac{x}{2}$ b) $f(x) = 5x$ c) 6
2.	8
3.	a) $20 - 4x$ b) 5
4.	3

Alıştırmalar (147. sayfa)	
1.	$-\frac{1}{12}$
2.	$3x^2 + 2x + 3$
3.	
4.	5
5.	$6\sqrt{5}$
6.	$\frac{8}{9}$
7.	2
8.	$-\frac{3}{4}(x-4)\cdot(x+4)$

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
125.	-4
130.	16
138.	
141.	$-x^2 + 2x - 5$
150.	400
152.	
155.	
158.	

Ölçme ve Değerlendirme

1.	ortalama değişim hızı
2.	parabol
3.	simetri ekseni
4.	kökleri
5.	küçük
6.	$x = 0$
7.	c
8.	d
9.	e
10.	b
11.	a
12.	$8\sqrt{2}$
13.	$-\frac{1}{3}$
14.	56
15.	-1
16.	5
17.	$(x+4)^2+1$, $(x+2)^2$, $-(x-3)^2+2$, $-(x+1)^2+3$
18.	6
19.	a) $p > a > d$ b) 9
20.	2700 m^2
21.	
22.	a) 80 b) 70 c) 0 ç) 121
23.	$\frac{11}{9}$
24.	C
25.	D
26.	B
27.	A
28.	C
29.	C

Alıştırmalar (171. sayfa)

1.	-3
2.	$\{(-1,-2),(1,2)\}$
3.	$\{(-4,-\sqrt{15}),(-4,\sqrt{15}),(3,-1),(3,1)\}$
4.	{ }
5.	$\{(-4,-3),(-4,3),(4,-3),(4,3)\}$
6.	{(0 , 1), (1, 0)}

Alıştırmalar (183. sayfa)

1.	$(-\infty,\ 1)-\{-3\}$
2.	$[-3,\ -1]\cup\{3\}$
3.	-1
4.	22
5.	$(-\infty,-6]\cup(1,\ 4]\cup(5,\infty)$
6.	$[-1,\ 2]$
7.	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$
8.	$(-\infty,\ 2)\cup(7,\ \infty)$

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
167	{(3, -3), (-2, 2)}
169	{(−2, −1), (−2, 1), (2, −1), (2, 1)}
170	{(3, −2)}
175	$\left(-\infty,\ -\frac{5}{2}\right)\cup(1,\ \infty)$
178	$(-\infty,\ -2)$
182	6
185	(−1, 1)

Ölçme ve Değerlendirme

1.	(0,1)
2.	a>0, $\Delta<0$
3.	$x_1=x_2$
4.	e
5.	b
6.	ç
7.	a
8.	(−2, 2)
9.	21
10.	$\left(-\frac{3}{2},1\right)$
11.	$\left\{\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right),(1,0)\right\}$
12.	(−1, 4)
13.	$(-3,\ 0]\cup(3,4]$
14.	a) $0\le t\le 1$, $3t^2-8t+4<0$ b) $\left(\frac{2}{3},1\right]$
15.	(0, 15)
16.	16.30 – 18.00
17.	D
18.	C
19.	A
20.	B
21.	B
22.	D
23.	C
24.	E
25.	D
26.	E
27.	E
28.	A

Alıştırmalar (198. sayfa)

1. 3
2. 8
3. $3\sqrt{2}$
4. 14
5. 9
6. 1
7. $\sqrt{85}$
8. $6-4\sqrt{2}$

Alıştırmalar (214. sayfa)

1. 110°
2. 70°
3. 70°
4. 40°
5. 16°
6. 50°
7. 96°
8. 30°

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
195.	3
195.	$2\sqrt{7}$
205.	70°
206	80°
209.	60°
210.	162°
211.	75
219.	36°
219.	$2\sqrt{2}-2$
223.	2
224.	90°
225.	4π
225.	$5\sqrt{2}-5$
227.	16π
227.	$\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$
228.	$2800\ \pi$

Ölçme ve Değerlendirme

1. kesen
2. bir
3. daire
4. çap
5. π
6. çevre açı
7. merkez
8. çember
9. c
10. b
11. e
12. ç
13. 17
14. 9
15. $\sqrt{15}$
16. 12
17. $3\sqrt{2}$
18. $8\sqrt{3}$
19. 2
20. 8
21. a) 5t b) $\pi.25t^2$ c) $14\ 400\pi\ m^2$
22. 4
23. B
24. B
25. D
26. A
27. D
28. A
29. E
30. D
31. D
32. B
33. A
34. C

Ölçme ve Değerlendirme

1.	$\frac{1}{3}$
2.	πra
3.	$2\pi rh$
4.	$\frac{1}{27}$
5.	4
6.	c
7.	a
8.	b
9.	d
10.	125
11.	177 096 TL
12.	$\frac{32\pi}{3}$
13.	$\frac{160}{3}$
14.	14
15.	400π
16.	2
17.	$\frac{1}{5\pi}$
18.	C
19.	E
20.	A
21.	B
22.	A
23.	D
24.	C

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
245	177
251	$\frac{72}{5}$
253	$\frac{3}{4}$

Ölçme ve Değerlendirme

1.	örnek uzay
2.	basit olay
3.	bağımsız
4.	koşullu olasılığı
5.	b
6.	c
7.	ç
8.	d
9.	a
10.	$\frac{1}{3}$
11.	$\frac{2}{5}$
12.	$\frac{3}{4}$
13.	$\frac{39}{56}$
14.	$\frac{23}{25}$
15.	C
16.	A
17.	C
18.	C
19.	C
20.	A
21.	C
22.	B
23.	B
24.	B
25.	A
26.	B
27.	A

Sıra Sizde

Sayfa No.	Cevap
265	$\frac{1}{12}$
268	$\frac{4}{81}$
271	$\frac{1}{6}$

SÖZLÜK

A

açı : Ortak başlangıç noktasına sahip iki ışının bileşimi.

açınım : Bir cismin yüzeylerinin açılıp bir düzlem üzerine yayılması.

açıortay : Bir açıyı birbirine eş iki açıya ayıran ışın.

ağırlık merkezi : Bir üçgenin kenarortaylarının kesiştiği nokta.

apsis : Düzlemde bir noktanın birinci bileşeni.

ara kesit : Çizgilerin, yüzeylerin, katı cisimlerin birbirine rastladıkları ve kesiştikleri yer.

ayrıt : İki düzlemin ara kesiti.

B

bağımlı olay : Bir olayın gerçekleşme olasılığının başka bir olayı etkileme durumu.

birim çember : Yarıçapı bir birim olan ve merkezi orijinde bulunan çember.

Ç

çap : Bir çemberin merkezinden geçen bir doğrunun çemberi kestiği iki nokta arasındaki uzaklık.

çember : Merkez denilen sabit bir noktadan aynı uzaklık ve düzlemdeki noktalar kümesinin oluşturduğu kapalı eğri.

çözüm kümesi : Bir denklemin ya da denklem sisteminin çözümünden oluşan küme.

D

daire : Bir çemberle iç bölgesinin birleşimi.

denklem sistemi : İki veya daha fazla denklemden oluşan sistem.

denklem : İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik.

derece : Bir çemberin 360 eşit parçasından birini gören merkezî açı.

E

eğim açısı : Düzlemde bir doğrunun yatay eksenle yaptığı pozitif yönlü açı.

eksen : Üzerinde bir yön belirlenmiş doğru.

eşitsizlik : Bir çokluğun bir diğerinden küçük, küçük ya da eşit, büyük, büyük ya da eşit olduğunu bildiren önerme.

F

fonksiyon : Bağımsız değişkenler ile bağımlı değişken arasındaki ilişkinin matematiksel ifadesi.

H

hacim : Bir cismin uzayda kapladığı boşluk.

hipotenüs : Bir dik üçgende, dik açının karşısında bulunan kenar.

I

ışın : Bir noktadan çıkıp sonsuza giden yarım doğrulardan her biri.

K

kenarortay : Üçgenin bir köşesi ile karşı kenarının orta noktasını birleştiren doğru parçası.

kesen : Bir çemberi farklı iki noktada kesen doğru.

kiriş : Bir çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçası.

küre : Bütün noktaları merkezden aynı uzaklıkta bulunan bir yüzeyle sınırlı cisim.

N

negatif yön : Saatin dönme yönü.

O

olasılık : Bir olayın olabilirlik değerinin 0 ile 1 (0 ve 1 dâhil) arasındaki bir gerçek sayıyla gösterilmiş biçimi.

olay : Bir deney ya da bir oluşumdan elde edilebilecek tüm sonuçların bir altkümesi.

ordinat : Düzlemde bir noktanın ikinci bileşeni.

orijin : Başlangıç noktası.

orta dikme : Düzlemde bir doğru parçasına orta noktasında dik olan doğru.

Ö

özdeş : Biçimleri, değerleri ya da işlevleri eş olan.

P

periyot : Tekrarlanan olaylar arasında geçen sabit zaman aralığı.

pozitif yön : Saatin dönme yönünün tersi.

R

radyan : Bir çemberde, uzunluğu yarıçapa eşit olan bir yayın belirlediği açının ölçüsü.

S

saniye : 1. Bir dakikanın altmışta biri olan zaman birimi. 2. Bir derecenin üç bin altı yüzde biri.

silindir : Alt ve üst tabanları birbirine eşit dairelerden oluşan bir nesnenin eksenini dikey olarak kesen, birbirine paralel iki yüzeyin sınırladığı cisim.

simetri : Eksen olarak alınan bir doğrudan, benzer noktaları karşılıklı olarak aynı uzaklıkta bulunan iki benzer parçanın birbirine göre durumu.

T

teğet : Bir eğriye sadece bir noktada değen doğru.

Y

yay : Bir çember üzerindeki iki nokta ile bu nokta arasındaki çember parçası.

yönlü açı : Işınlarından biri başlangıç, diğeri bitiş ışını olarak gösterilen açı.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

=	Eşittir.
≠	Eşit değil.
≈	Yaklaşık değer.
≥	Büyük veya eşittir.
>	Büyüktür.
≤	Küçük veya eşittir.
<	Küçüktür.
%	Yüzde.
~	Benzerdir.
°	Derece.
√	Karekök.
∈	Elemanıdır.
∉	Elemanı değil.
⊂	Alt küme.
⊥	Diktir.
//	Paraleldir.
∞	Sonsuz.
π	Pi sayısı.
$\lvert x \rvert$	x gerçek sayısının mutlak değeri.
ℕ	Doğal sayılar kümesi.
ℝ	Gerçek sayılar kümesi.
ℤ	Tam sayılar kümesi.
⇒	İse.
⇔	Ancak ve ancak.
∀	Her.
[AB	AB ışını.

[AB]	AB doğru parçası.
$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu.
[a,b]	Kapalı aralık.
(a,b)	Açık aralık.
[a,b)	a dan kapalı, b den açık aralık.
(a,b]	a dan açık, b den kapalı aralık.
r	Yarıçap.
∅	Boş küme.
∩	Kesişim.
∪	Birleşim.
S	Yüzey alanı.
V	Hacim.
A'	A olayının tümleyeni.
E	Örnek uzay.
P(A)	A olayının gerçekleşme olasılığı.
P(A∩B)	A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı.
P(A∪B)	A veya B olaylarının gerçekleşme olasılığı.
$A(x_1, y_1)$	Apsisi x_1 ve ordinatı y_1 olan A noktası.
ÇK	Çözüm kümesi.

KAYNAKÇA

[1] A. ARIKAN ve S. HALICIOĞLU, *Soyut Matematik*, Ankara: Palme Yayıncılık, 2013.
[2] B. T. GEORGE ve L. F. ROSS, *Calculus and Analytic*, Beta, 2001.
[3] C. H. EDWARDS ve D. E. PENNEY, *Matematik Analiz ve Analitik Geometri*, cilt 5, Ankara: Palme Yayıncılık, 2001.
[4] D. M. BURTON, *Matematik Tarihi – Giriş*, cilt 7, Ankara: Nobel Yaşam, 2017.
[5] D. P. SREEKUMAR, *Fundamental Approach to Discrete Mathematics*, New Delhi: New Age International Limited Publisher, 2005.
[6] G. A. VENEMA, *Foundations of Geometry*, New Jersey: Prentice Hall, 2006.
[7] H. K. ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications*, Inc. New York: The McGraw-Hill Companies, 2012.
[8] H. SINGH, *Mathematics. National Council of Educational Research and Training*, New Delhi: 2005.
[9] M. BALCI, *Genel Matematik Analiz*, Ankara: Balcı Yayınları, 1999.
[10] M. BALCI, *Genel Matematik*, cilt 2, Ankara: Balcı Yayınları, 2003.
[11] T.C. Millî Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı, 2018.
[12] R. GARNIER ve J. TAYLOR, *Discrete Mathematics for New Technology*, Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2002.
[13] R. P. GRIMALDI, *Discrete and Combinatorial Mathematics,* Pearson Education An Applied Introduction, 2004.
[14] S. O. ERBAŞ, *Olasılık ve İstatistik*, cilt 2, Ankara: Gazi Kitabevi, 2008.
[15] *Türk Dil Kurumu Yazım Kılavuzu*, cilt 27, Ankara: TDK Yayınları, 2012.

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

http://tuzgoluebt.botas.gov.tr/index.php/tr
www.tdk.gov.tr

GÖRSEL KAYNAKÇA

1. Ünite
Cetvel: https://www.shutterstock.com ID: 528595441. (ET: 01.02.2018)
Hazırlık görselleri:
https://www.shutterstock.com ID: 527142106. (ET: 01.02.2018)
https://www.shutterstock.com ID: 116343610. (ET: 01.02.2018)
Basket: https://www.shutterstock.com ID: 637299235, 151063904 . (ET: 01.02.2018)
2. Ünite
Türk Yıldızları: https://www.shutterstock.com ID: 759065905. (ET: 01.02.2018)
Hazırlık görselleri:
https://www.shutterstock.com ID: 234158710. (ET: 01.02.2018)
https://www.shutterstock.com ID: 43301713. (ET: 01.02.2018)
Manyas Gölü: https://www.shutterstock.com ID: 31520986. (ET: 01.02.2018)

3. Ünite

Köprü: https://www.shutterstock.com ID: 718886848. (ET: 01.02.2018)
Hazırlık görselleri:
https://www.shutterstock.com ID: 517663504. (ET: 01.02.2018)
https://www.shutterstock.com ID: 481603654. (ET: 01.02.2018)
https://www.shutterstock.com ID: 524812486. (ET: 01.02.2018)
Su kemeri: https://www.shutterstock.com ID: 31520986. (ET: 01.02.2018)

4. Ünite

Taşlar: https://www.shutterstock.com ID: 524250877. (ET: 01.02.2018)
Hazırlık görseli: https://www.shutterstock.com ID: 122374183, 157284926. (ET: 01.02.2018)

5. Ünite

Bisikletli: https://www.shutterstock.com ID: 197046800. (ET: 01.02.2018)
Futbol sahası: https://www.shutterstock.com ID: 560961217. (ET: 01.02.2018)
Araba tekerleği: https://www.shutterstock.com ID: 752114251. (ET: 01.02.2018)
Tekerlek zinciri: https://www.shutterstock.com ID: 707169784. (ET: 01.02.2018)
Helikopter: https://www.shutterstock.com ID: 750831319. (ET: 01.02.2018)
Aydınlatma: https://www.shutterstock.com ID: 243680668. (ET: 01.02.2018)
Döner merdiven: https://www.shutterstock.com ID: 39722656. (ET: 01.02.2018)
Dönel kavşak: https://www.shutterstock.com ID: 734777656. (ET: 01.02.2018)
Tanker: https://www.shutterstock.com ID: 371663740. (ET: 01.02.2018) adresinden alınarak düzenlenmiştir.

6. Ünite

Katı cisim: https://www.shutterstock.com ID: 246167524. (ET: 01.02.2018)
Karpuz: https://www.shutterstock.com ID: 258791630. (ET: 01.02.2018)
Sirk çadırı: https://www.shutterstock.com ID: 103260653. (ET: 01.02.2018)
Pasta: https://www.shutterstock.com ID: 578418439. (ET: 01.02.2018)
Kubbetü's–Sahra: https://www.shutterstock.com ID: 263353394. (ET: 01.02.2018)

7. Ünite

Bilyeler: https://www.shutterstock.com ID: 424310623. (ET: 01.02.2018)
Hazırlık görseli: https://www.shutterstock.com ID: 721426675. (ET: 01.02.2018)
Zar: https://www.shutterstock.com ID: 634951727. (ET: 01.02.2018)

Kaynakça IEEE standartlarına göre hazırlanmıştır.